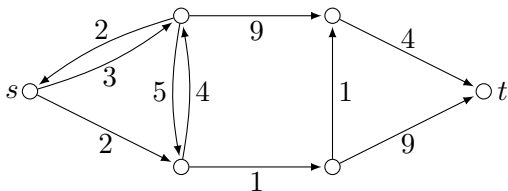


Graphentheorie

12 – Flüsse und Strömungen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Flüsse und Strömungen



Kantengewichte geben Wassermenge in Liter pro Sekunde an.

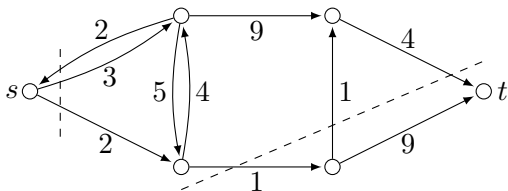
Frage: Wie viel Wasser kann von der Quelle s zum Ziel t fließen?

Maximaler Fluss = Wie viel Wasser kann von der Quelle zur Senke fließen?

Minimaler Schnitt = Kantenmenge mit minimalem Gewicht, so dass Graph zerfällt.

In diesem Beispiel: Maximale Fluss (5) = Minimaler Schnitt (5).

Flüsse und Strömungen



Kantengewichte geben Wassermenge in Liter pro Sekunde an.

Frage: Wie viel Wasser kann von der Quelle s zum Ziel t fließen?

Maximaler Fluss = Wie viel Wasser kann von der Quelle zur Senke fließen?

Minimaler Schnitt = Kantenmenge mit minimalem Gewicht, so dass Graph zerfällt.

In diesem Beispiel: Maximale Fluss (5) = Minimaler Schnitt (5).

Flüsse und Strömungen – Begriffe

Im Folgenden:

- $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ist endlicher gerichteter Graph
- Abbildung $c : R \rightarrow \mathbb{R}^+$ weist jeder Kante ein *Kapazität* zu
- Abbildung $f : R \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ weist jeder Kante einen *Flusswert* zu

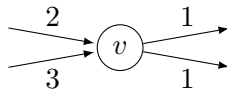
Der *Flussüberschuss* in v ist

$$\text{exzess}_f(v) = f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))$$

mit

$$f(\delta^+(v)) = \sum_{r \in \delta^+(v)} f(r)$$

$$f(\delta^-(v)) = \sum_{r \in \delta^-(v)} f(r)$$



$$\text{exzess}_f(v) = 5 - 2$$

(s, t) -Flüsse

Definition 9.1

Seien $s, t \in V$. Die Abbildung f heißt (s, t) -*Fluss* wenn

$$\forall v \in V \setminus \{s, t\} : \text{exzess}_f(v) = 0 .$$

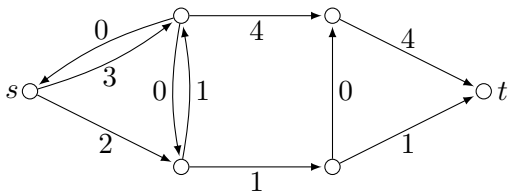
Der Knoten s heißt *Quelle* und t heißt *Senke*.

Der *Wert des Flusses* ist definiert als

$$\text{val}(f) := \text{exzess}_f(t) .$$

Der Fluss f heißt *zulässig*, falls

$$\forall r \in R : f(r) \leq c(r) .$$



(s, t) -Schnitte

Definition 9.3

Ein *Schnitt* (S, T) ist eine Partition von V , d.h. $V = S \dot{\cup} T$.

Ein Schnitt (S, T) mit $s \in S$ und $t \in T$ heißt (s, t) -*Schnitt*.

Vorwärtsteil des Schnittes: $\delta^+(S) = \delta^-(T) := \{r \in R \mid \alpha(r) \in S \wedge \omega(r) \in T\}$

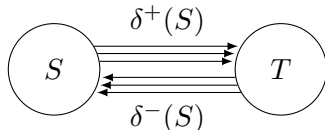
Rückwärtsteil des Schnittes: $\delta^-(S) = \delta^+(T) := \{r \in R \mid \alpha(r) \in T \wedge \omega(r) \in S\}$

$$exzess_f(T) := f(\delta^-(T)) - f(\delta^+(T))$$

$$exzess_f(S) := f(\delta^-(S)) - f(\delta^+(S))$$

Beobachtung

$$exzess_f(T) = -exzess_f(S)$$



(s, t) -Schnitte

Lemma 9.4

$exzess_f(T) = \sum_{v \in T} exzess_f(v)$ bzw. $exzess_f(S) = \sum_{v \in S} exzess_f(v)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in T} exzess_f(v) &= \sum_{v \in T} f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) \\ &= \sum_{v \in T} \left(\sum_{r \in \delta^-(v)} f(r) - \sum_{r \in \delta^+(v)} f(r) \right) \\ &= \sum_{r \in \delta^-(T)} f(r) - \sum_{r \in \delta^+(T)} f(r) = exzess_f(T) \end{aligned}$$

Hinweis: Alle Kanten r mit $\alpha(r) \in T$ und $\omega(r) \in T$ tauchen in der Summe einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auf. □

(s, t) -Schnitte

Lemma 9.5

Für alle (s, t) -Flüsse f und (s, t) -Schnitte (S, T) gilt

$$\text{val}(f) = \text{exzess}_f(t) = \text{exzess}_f(T) = -\text{exzess}_f(S) = -\text{exzess}_f(s)$$

Beweis.

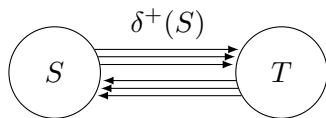
$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \text{exzess}_f(t) \\ &= \sum_{v \in T} \text{exzess}_f(v) && \text{(da } \text{exzess}_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s, t\text{)} \\ &= \text{exzess}_f(T) \\ &= -\text{exzess}_f(S) \\ &= -\sum_{v \in S} \text{exzess}_f(v) \\ &= -\text{exzess}_f(s) && \text{(da } \text{exzess}_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s, t\text{)} \end{aligned}$$

Schnitte vs. Flüsse

Definition 9.6

Die *Kapazität* eines Schnittes (S, T) ist

$$c(\delta^+(S)) := \sum_{r \in \delta^+(S)} c(r)$$



Lemma 9.7

Für alle zulässigen (s, t) -Flüsse und (s, t) -Schnitte (S, T) gilt

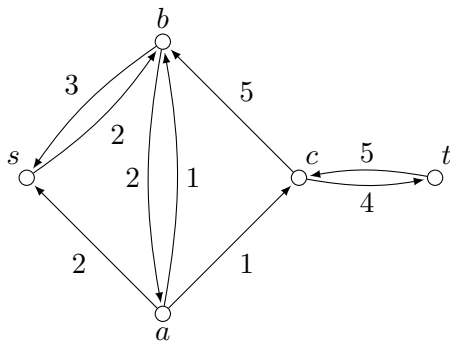
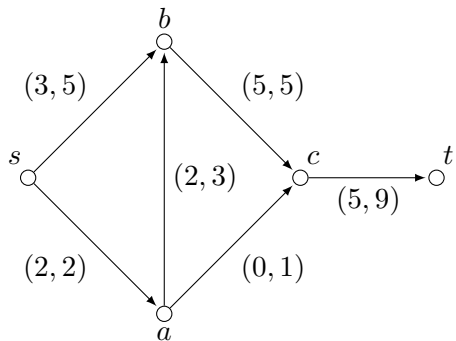
$$\text{val}(f) \leq c(\delta^+(S)) .$$

Beweis.

$$\text{val}(f) = -\text{exzess}_f(S) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) \leq c(\delta^+(S))$$

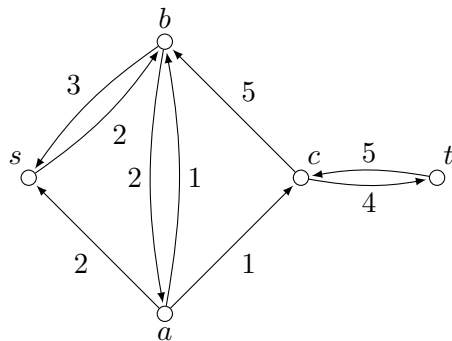
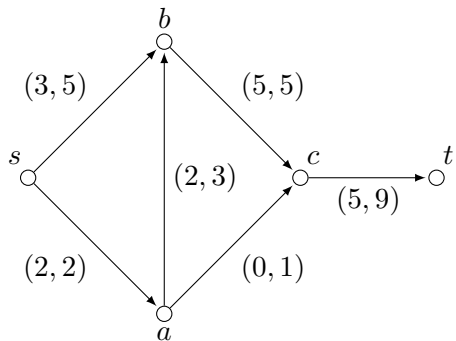


Residualnetze

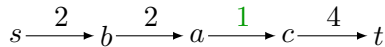


Kantenbeschriftung:
(Flusswert, Kapazität)

Residualnetze



Kantenbeschriftung:
(Flusswert, Kapazität)



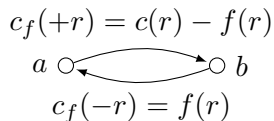
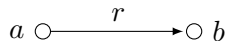
Residualnetze

Definition 9.9

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ und c die Kapazitätsfunktion sowie f ein zulässiger Fluss.

Das *Residualnetz* $G_f = (V, R_f, \alpha', \omega')$ mit Kapazitätsfunktion c_f ist definiert durch

- $R_f = \{+r \mid r \in R \wedge f(r) < c(r)\} \cup \{-r \mid r \in R \wedge f(r) > 0\}$
- $\alpha'(+r) = \alpha(r)$ und $\omega'(+r) = \omega(r)$
- $c_f(+r) = c(r) - f(r)$
- $\alpha'(-r) = \omega(r)$ und $\omega'(-r) = \alpha(r)$
- $c_f(-r) = f(r)$



Kanten mit Kapazität 0 sind nicht Teil von G_f !

Residualnetze

Definition 9.10

Ein Weg P von s nach t in G_f heißt *flussvergrößernder Weg*.

Wir definieren $\Delta(P) := \min_{r' \in P} c_f(r')$

Der Fluss f wird durch P wie folgt augmentiert:

- Für jede Kante $+r \in P$ wird $f(r)$ um $\Delta(P)$ vergrößert.
- Für jede Kante $-r \in P$ wird $f(r)$ um $\Delta(P)$ verringert.

Da P in t endet, wird $val(f) = excess_f(t)$ um $\Delta(P)$ erhöht.

Beobachtung 9.11

Falls ein flussvergrößernder Weg existiert, so ist f nicht maximal.

Residualnetze

Lemma 9.12

Seien f und f^* zulässige (s, t) -Flüsse und sei $val(f^*)$ maximal.
Dann gilt $val(f^*) \leq val(f) + c_f(\delta_{G_f}^+(S))$ für alle (s, t) -Schnitte (S, T) .

Beweis.

Nach Lemma 9.7 gilt $val(f^*) = val(f) + \varepsilon \leq c(\delta^+(S))$ mit $\varepsilon \geq 0$ und somit

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq c(\delta^+(S)) - val(f) \\ &= c(\delta^+(S)) + exzess_f(S) \\ &= c(\delta^+(S)) - f(\delta^+(S)) + f(\delta^-(S)) \\ &= \sum_{r \in \delta^+(S)} c(r) - f(r) + \sum_{r \in \delta^-(S)} f(r) \\ &= \sum_{+r \in \delta_{G_f}^+(S)} c_f(+r) + \sum_{-r \in \delta_{G_f}^+(S)} c_f(-r) \\ &= c_f(\delta_{G_f}^+(S))\end{aligned}$$

□

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz 9.13 (Max-Flow-Min-Cut-Theorem)

$$\max_{f \text{ ist zulässiger } (s,t)\text{-Fluss}} \text{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt}} c(\delta^+(S))$$

Beweis, Teil 1.

Laut Lemma 9.7 gilt $\text{val}(f) \leq c(\delta^+(S))$ für alle (s,t) -Schnitte.

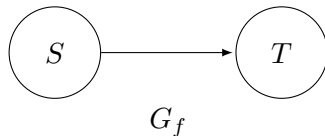
Zu zeigen: (s,t) -Schnitt mit $c(\delta^+(S)) = \text{val}(f)$ existiert.

Sei f ein zulässiger (s,t) -Fluss und $\text{val}(f)$ maximal.

Wir setzen $S := E_{G_f}(s)$ und $T := V \setminus S$.

In G_f existiert kein flussvergrößernder Weg.

Damit ist $s \in S$ und $t \in T$ und (S,T) ist ein (s,t) -Schnitt.



Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz 9.13 (Max-Flow-Min-Cut-Theorem)

$$\max_{f \text{ ist zulässiger } (s,t)\text{-Fluss}} \text{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt}} c(\delta^+(S))$$

Beweis, Teil 1.

Laut Lemma 9.7 gilt $\text{val}(f) \leq c(\delta^+(S))$ für alle (s,t) -Schnitte.

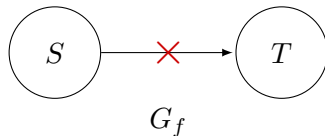
Zu zeigen: (s,t) -Schnitt mit $c(\delta^+(S)) = \text{val}(f)$ existiert.

Sei f ein zulässiger (s,t) -Fluss und $\text{val}(f)$ maximal.

Wir setzen $S := E_{G_f}(s)$ und $T := V \setminus S$.

In G_f existiert kein flussvergrößernder Weg.

Damit ist $s \in S$ und $t \in T$ und (S,T) ist ein (s,t) -Schnitt.



Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Beweis, Teil 2.

Sei $r \in \delta^+(S)$. Dann gilt $f(r) = c(r)$.

Sonst gäbe es in G_f Kante $+r$ und damit einen Weg von s zu $\omega(r) \in T$. ⚡

Damit gilt $f(\delta^+(S)) = c(\delta^+(S))$.

Sei $r \in \delta^-(S)$. Dann gilt $f(r) = 0$.

Sonst gäbe es in G_f Kante $-r$ und damit einen Weg von s zu $\alpha(r) \in T$. ⚡

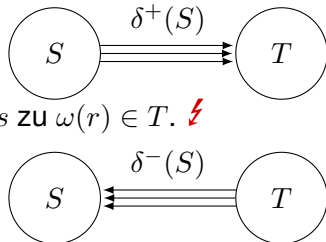
Damit gilt $f(\delta^-(S)) = 0$.

Zusammengefasst: $c(\delta^+(S)) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) = -\text{exzess}_f(S) = \text{val}(f)$.

□

Satz 9.14 (Augmenting-Path-Theorem)

Ein (s, t) -Fluss f ist genau dann maximal, wenn es keinen flussvergrößernden Weg im Residualnetz G_f gibt.



Ganzzahlige Flüsse

Satz

Ein gerichteter Graph $G = (V, R)$ mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion $c : R \rightarrow \mathbb{N}$ hat einen ganzzahligen maximalen Fluss f , d.h. $\forall r \in R : f(r) \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Idee: Induktion über flussvergrößernde Wege

Sei f ein ganzzahliger nicht-maximaler Fluss.

Sei G_f das zu f gehörende Residualnetzwerk.

Sei P ein Weg von s zu t in G_f .

Dann ist $\Delta(P)$ ganzzahlig.

Vergrößere Fluss f entlang P um $\Delta(P)$.

Ergebnis ist ein ganzzahliger Fluss. □

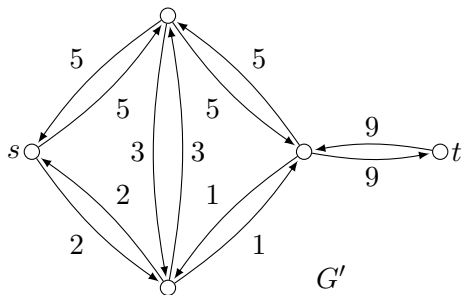
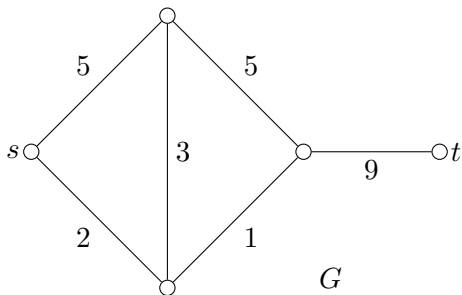
Flüsse in ungerichteten Graphen - Ansatz 1

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Berechne Fluss in gerichtetem Graph $G' = (V, R)$.

Für jede Kante $e = [u, v] \in E$ enthält R zwei Kanten:

- $r = (u, v)$ mit $c(r) = c(e)$
- $r' = (v, u)$ mit $c(r') = c(e)$



Flüsse in ungerichteten Graphen - Ansatz 2

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Konstruiere gerichtetes Residualnetz $G_f = (V, R_f)$ wie folgt:

Betrachte $e \in E$ mit Kapazität $c(e)$ und Fluss $f(e)$.

Sei $-c(e) \leq f(e) \leq c(e)$ und Richtung von $f(e)$ ist definiert.

$+e \in R_f$ hat Kapazität $c(e) - f(e)$ in Flussrichtung von $f(e)$.

$-e \in R_f$ hat Kapazität $c(e) + f(e)$ in Gegenrichtung von $f(e)$.



Flussvergrößernder Weg benutzt $+e$: $f(e)$ wird vergrößert.

Flussvergrößernder Weg benutzt $-e$: $f(e)$ wird verringert.

Kanten mit Kapazität 0 sind nicht Teil von G_f !