

Graphentheorie

14 – Färbungen, Cliques, Perfekte Graphen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Färbungen

Hinweis: Im Folgenden betrachten wir einfache ungerichtete Graphen $G = (V, E)$.

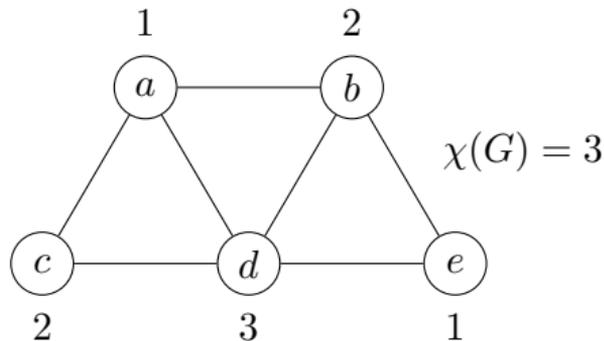
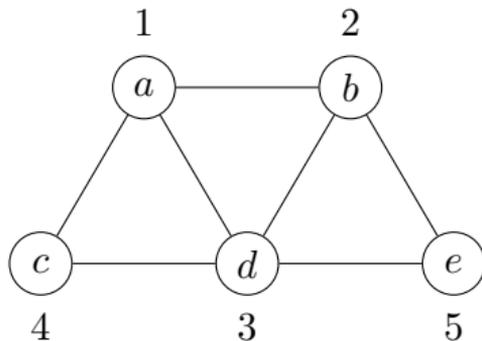
Definition 4.8

Eine k -Färbung ist eine surjektive Abbildung $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ so dass

$$\forall [u, v] \in E : f(u) \neq f(v)$$

Farbklassse i ist definiert durch $f^{-1}(i) = \{v \in V \mid f(v) = i\}$

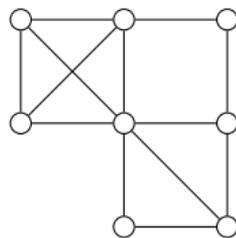
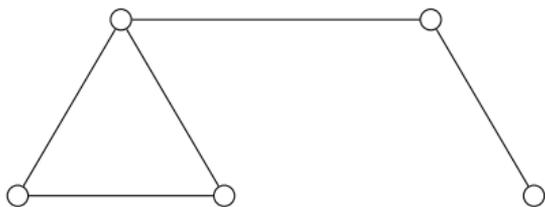
Chromatische Zahl von G ist $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert } k\text{-Färbung von } G\}$



Cliquen

Definition 4.1

Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt *Clique* wenn $\forall u, v \in C : u = v \vee [u, v] \in E$



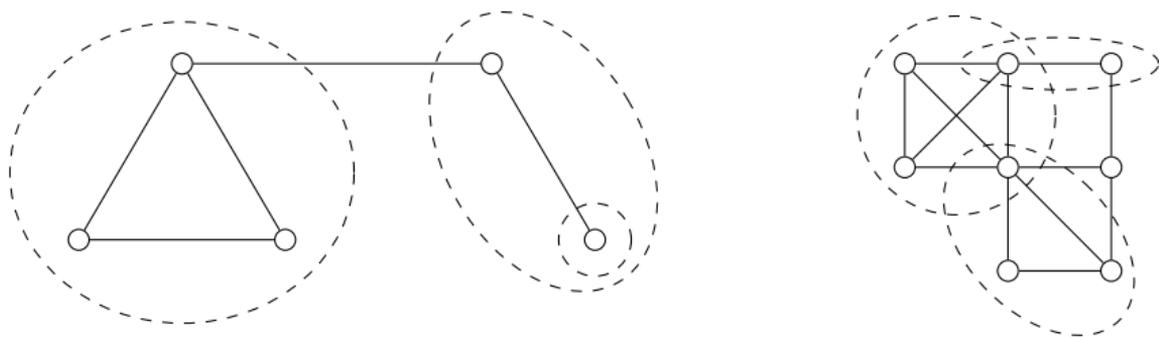
Definition 4.2

Die Cliquenzahl ist definiert als $\omega(G) := \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$

Cliquen

Definition 4.1

Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt *Clique* wenn $\forall u, v \in C : u = v \vee [u, v] \in E$



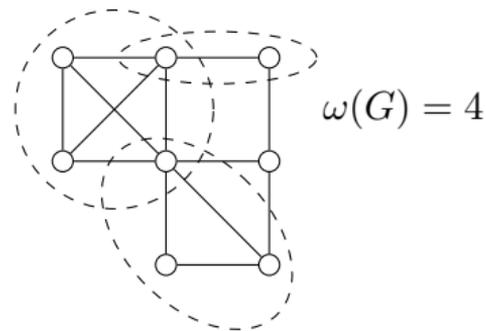
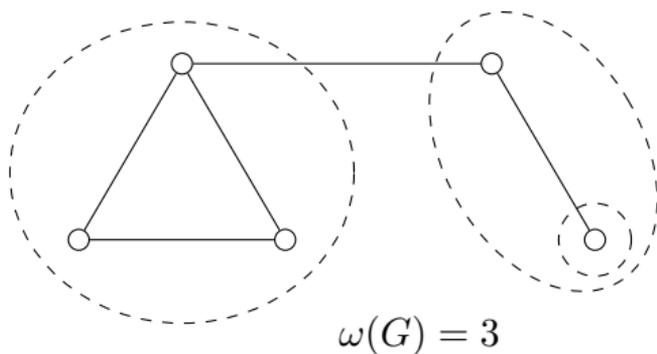
Definition 4.2

Die Cliquenzahl ist definiert als $\omega(G) := \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$

Cliquen

Definition 4.1

Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt *Clique* wenn $\forall u, v \in C : u = v \vee [u, v] \in E$



Definition 4.2

Die Cliquenzahl ist definiert als $\omega(G) := \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$

Chromatische Zahl vs. Cliquenzahl

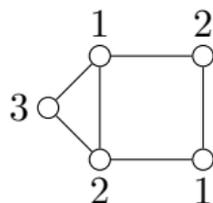
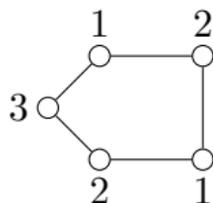
Beobachtung

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Beweis.

Sei C die größte Clique in G .

Man benötigt mind. $|C|$ Farben um die Knoten in C zu färben. □



Für perfekte Graphen gilt: $\chi(G) = \omega(G)$

Chromatische Zahl vs. Cliquenzahl

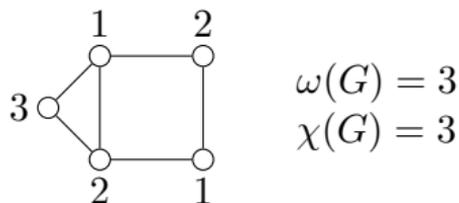
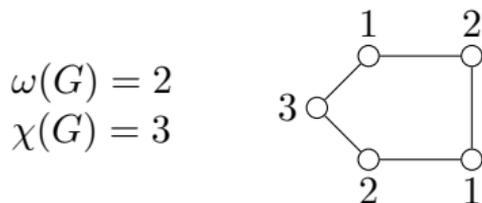
Beobachtung

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Beweis.

Sei C die größte Clique in G .

Man benötigt mind. $|C|$ Farben um die Knoten in C zu färben. □



Für perfekte Graphen gilt: $\chi(G) = \omega(G)$

Cliquenzerlegung

Definition 4.3

Eine *Cliquenzerlegung* ist eine Partition

$$V = C_1 \dot{\cup} C_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_k ,$$

sodass jedes C_i eine Clique in G ist.

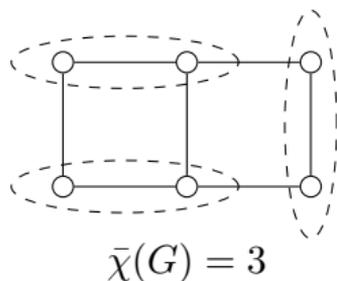
Die *Cliquenzerlegungszahl* ist

$$\bar{\chi}(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert Cliquenzerlegung } C_1 \dot{\cup} C_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_k\}$$

Beispiele:

- jeder vollständige Graph: $\bar{\chi}(G) = 1$
- jeder Graph ohne Kanten: $\bar{\chi}(G) = n$

Gibt es immer eine Cliquenzerlegung?



Unabhängige Mengen

Definition 4.4

Eine Menge $U \subseteq V$ heißt *unabhängige Menge* falls

$$\forall u, v \in U : v = u \vee [u, v] \notin E$$

Die *Unabhängigkeitszahl* ist

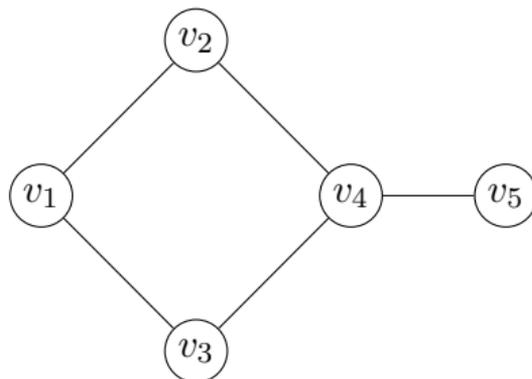
$$\alpha(G) := \max\{|U| \mid U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$$

Beispiel für unabhängige Mengen:

$$U = \{v_4\}$$

$$U = \{v_1, v_4\}$$

$$U = \{v_2, v_3, v_5\}$$



Unabhängigkeitszahl vs. Cliquenzerlegungszahl

Beobachtung

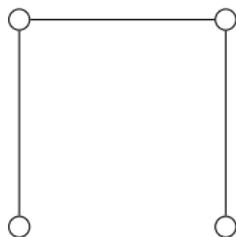
$$\alpha(G) \leq \bar{\chi}(G)$$

Beweis.

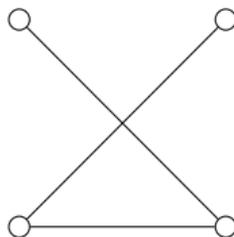
Von jeder Clique kann man höchstens einen Knoten nehmen. □

Definition 4.6

Ein *Komplementgraph* $\bar{G} = (V, \bar{E})$ eines einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist definiert durch $\bar{E} = \{[u, v] \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge [u, v] \notin E\}$.



G

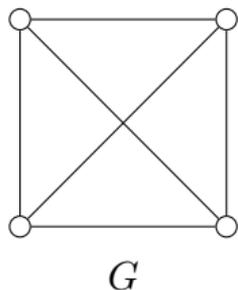


\bar{G}

Komplementgraphen

Beobachtung

- $\overline{\overline{G}} = G$
- $|E| + |\overline{E}| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $S \subseteq V$ ist genau dann eine Clique in G , wenn S unabhängig in \overline{G} ist
- $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ bzw. $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$



Chromatische Zahl vs. Unabhängigkeitszahl

Beobachtung

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \quad \text{bzw.} \quad \chi(G)\alpha(G) \geq n$$

Beweis.

Farbklassen 1, 2, bis $\chi(G)$ sind unabhängige Mengen.
Jede unabhängige Menge enthält höchstens $\alpha(G)$ Knoten.

Sei f eine $\chi(G)$ -Färbung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{\chi(G)} |f^{-1}(i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) \\ &= \chi(G)\alpha(G) \end{aligned}$$

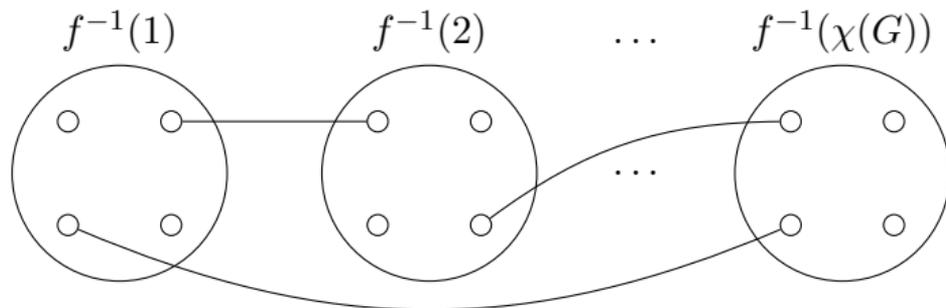
□

Schranke für Chromatische Zahl

Beobachtung

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Beweis, Teil 1.



Sei $k = \chi(G)$. Zwischen zwei Farbklassen $f^{-1}(i)$ und $f^{-1}(j)$ muss es mind. eine Kante geben. Sonst könnte man alle Knoten von $f^{-1}(j)$ mit der Farbe i färben.

Damit gilt $m \geq \binom{k}{2} = k(k-1)/2$.

Schranke für Chromatische Zahl

Beweis, Teil 2.

$$k(k-1)/2 \leq m$$

⇒

$$k^2 - k \leq 2m$$

⇒

$$k^2 - k + \frac{1}{4} \leq 2m + \frac{1}{4}$$

⇒

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2m + \frac{1}{4}$$

⇒

$$k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

⇒

$$k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

□

Schranke für Chromatische Zahl

Beispiel für Gleichheit:

Für vollständige Graphen gilt $m = \frac{n(n-1)}{2}$ und $\chi(G) = n$.

$$\frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} = n$$

$$\sqrt{2m + \frac{1}{4}} = n - \frac{1}{2}$$

$$n(n-1) + \frac{1}{4} = n^2 - n + \frac{1}{4}$$

Hinweis:

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, die Chromatische Zahl, Cliquenzahl und Unabhängigkeitszahl effizient zu berechnen.

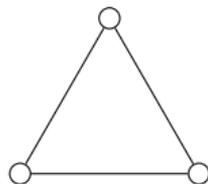
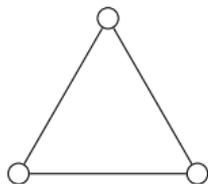
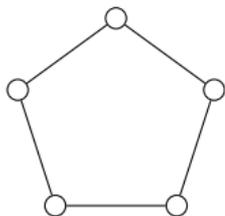
Beschränkt man sich auf bestimmte Klassen von Graphen, wird es möglich diese Größen effizient zu bestimmen.

Perfekte Graphen

Definition

Ein einfacher ungerichteter Graph G heißt *perfekt*, falls für jeden induzierten Subgraph H gilt:

$$\omega(H) = \chi(H)$$



ein nicht perfekter Graph

ein perfekter Graph

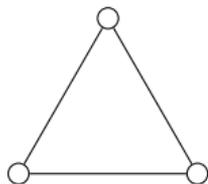
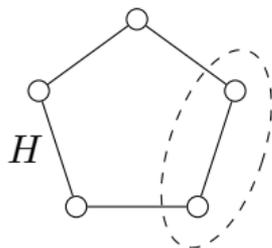
Perfekte Graphen

Definition

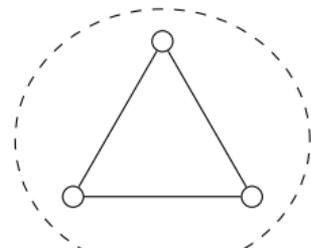
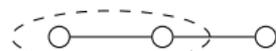
Ein einfacher ungerichteter Graph G heißt *perfekt*, falls für jeden induzierten Subgraph H gilt:

$$\omega(H) = \chi(H)$$

$$\begin{aligned}\omega(H) &= 2 \\ \chi(G) &= 3\end{aligned}$$



ein nicht perfekter Graph



ein perfekter Graph

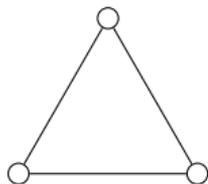
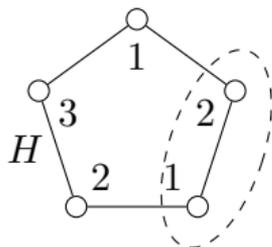
Perfekte Graphen

Definition

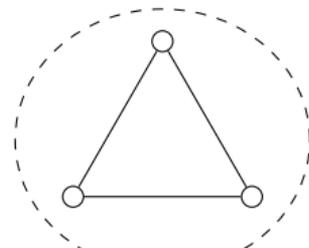
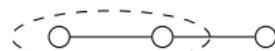
Ein einfacher ungerichteter Graph G heißt *perfekt*, falls für jeden induzierten Subgraph H gilt:

$$\omega(H) = \chi(H)$$

$$\omega(H) = 2$$
$$\chi(G) = 3$$



ein nicht perfekter Graph



ein perfekter Graph

Perfekte Graphen

Beispiele für perfekte Graphen:

- Bipartite Graphen
- Vollständige Graphen
- Chordale Graphen

Satz (Satz von Lovász (1972))

Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn \bar{G} perfekt ist.

Ohne Beweis.

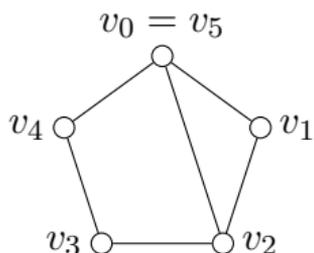
Löcher und Antilöcher

Definition

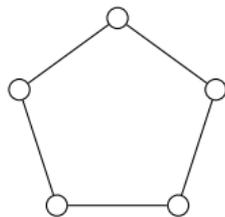
Ein *Loch* ist ein elementarer Kreis $C = (v_0, r_1, \dots, v_k)$ von ungerader Länge $k \geq 5$ welcher keine Sehne hat. Eine Sehne verbindet zwei von C berührte Knoten, die in C nicht aufeinander folgen.

C hat Sehne wenn $[v_i, v_j] \in E$ mit ($i = 0$ und $j \in [2, k - 2]$)
oder ($i > 0$ und $j \in [i + 2, k - 1]$).

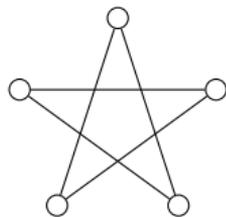
Ein *Antiloch* ist ein Loch im Komplementgraph.



Kreis mit Sehne

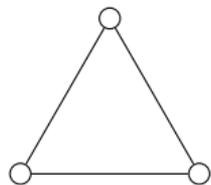


ein Loch

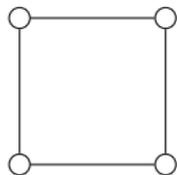


ein Antiloch

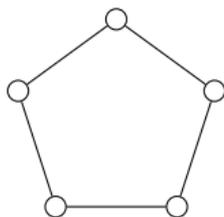
Löcher und Antilöcher – weitere Beispiele



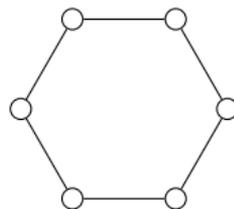
C_3



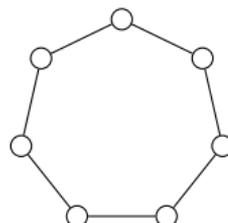
C_4



C_5

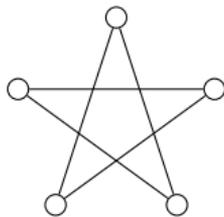


C_6

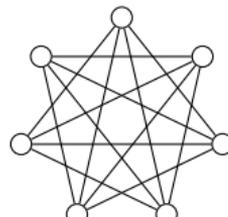


C_7

C_5 und C_7 sind ein Löcher. C_3 , C_4 und C_6 sind keine Löcher.



\bar{C}_5



\bar{C}_7

Strong Perfect Graph Theorem

Satz (Strong Perfect Graph Theorem)

Ein einfacher ungerichteter Graph G ist genau dann perfekt, wenn er kein Loch oder Antilocho enthält.

Die Vermutung wurde 1961 von Claude Berge aufgestellt und im Jahre 2002 von Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour und Robin Thomas bewiesen.

In perfekten Graphen kann man $\alpha(G)$, $\omega(G)$, $\chi(G)$ und $\bar{\chi}(G)$ in polynomieller Zeit berechnen.

Strong Perfect Graph Theorem

Korollar

Jeder bipartite Graph ist perfekt.

Beweisskizze, Teil 1.

Sei $G = (A \dot{\cup} B, E)$ ein bipartiter Graph.

Jeder Kreis in G hat gerade Länge,
kann also kein Loch sein.

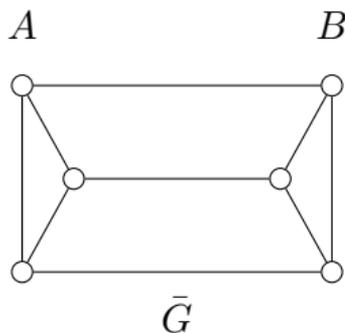
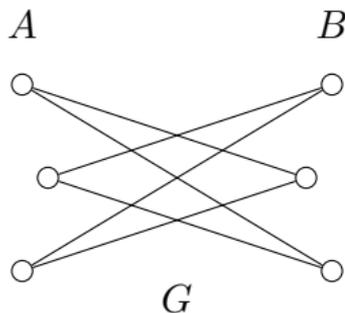
Betrachte $\bar{G} = (A \dot{\cup} B, \bar{E})$.

Mengen A und B sind Cliques.

Annahme:

Kreis hat 2 aufeinanderfolgenden Kanten aus $\bar{G}[A]$.

Dann hat der Kreis eine Sehne.



Strong Perfect Graph Theorem

Korollar

Jeder bipartite Graph ist perfekt.

Beweisskizze, Teil 1.

Sei $G = (A \dot{\cup} B, E)$ ein bipartiter Graph.

Jeder Kreis in G hat gerade Länge,
kann also kein Loch sein.

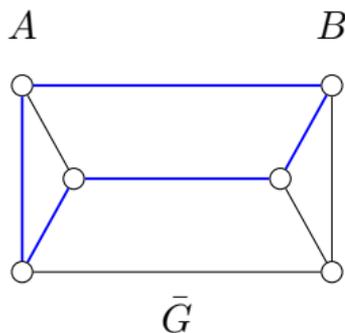
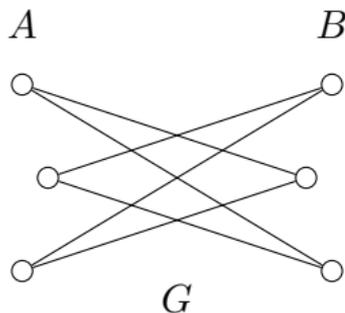
Betrachte $\bar{G} = (A \dot{\cup} B, \bar{E})$.

Mengen A und B sind Cliques.

Annahme:

Kreis hat 2 aufeinanderfolgenden Kanten aus $\bar{G}[A]$.

Dann hat der Kreis eine Sehne.



Strong Perfect Graph Theorem

Korollar

Jeder bipartite Graph ist perfekt.

Beweisskizze, Teil 2.

Betrachte $\bar{G} = (A \dot{\cup} B, \bar{E})$.

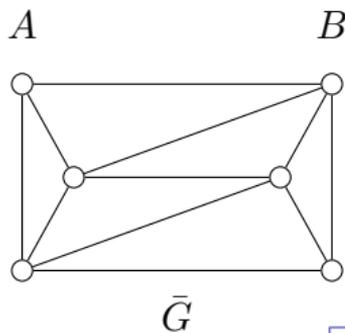
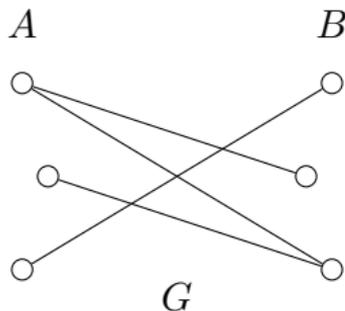
Mengen A und B sind Cliques.

Annahme:

Kreis hat 1 Kante aus $\bar{G}[A]$,
aber keine 2 folgen aufeinander.

Dann hat der Kreis eine Sehne.

\bar{G} kann also auch keine Löcher enthalten.



Strong Perfect Graph Theorem

Korollar

Jeder bipartite Graph ist perfekt.

Beweisskizze, Teil 2.

Betrachte $\bar{G} = (A \dot{\cup} B, \bar{E})$.

Mengen A und B sind Cliques.

Annahme:

Kreis hat 1 Kante aus $\bar{G}[A]$,
aber keine 2 folgen aufeinander.

Dann hat der Kreis eine Sehne.

\bar{G} kann also auch keine Löcher enthalten.

