# Graphentheorie
# 15 – Chordale Graphen

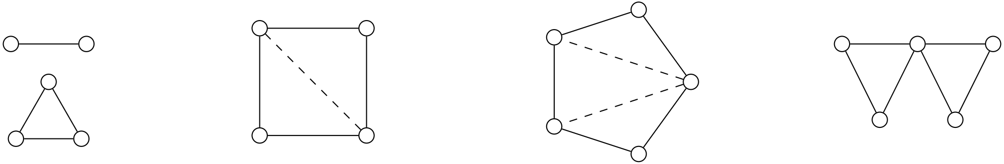
Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

# Chordale Graphen

## Definition 4.15

Ein ungerichteter einfacher Graph heißt *chordal*, wenn jeder elementare Kreis der Länge $k \geq 4$ eine Sehne besitzt.

Eine *Sehne* verbindet zwei Knoten, die im Kreis nicht aufeinander folgen.



Chordale Graphen heißen auch *trianguliert*.

# Chordale Graphen

## Beobachtung

Falls $G$ chordal ist, so ist auch jeder induzierte Subgraph chordal.

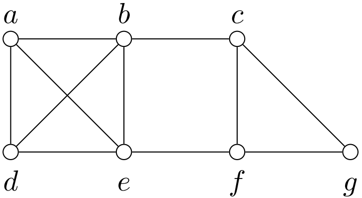
## Beweisidee.

Enthält ein induzierter Subgraph von $G$ einen Kreis, so enthält der Subgraph auch alle Sehnen des Kreises die in $G$ enthalten sind.

## Definition

Ein Knoten $v \in V(G)$ ist simplizial wenn $N_G(v)$ eine Clique ist.

*Bemerkung:* $N_G(v)$ ist genau dann eine Clique, wenn $N_G(v) \cup \{v\}$ eine Clique ist.




$$N(a) = \{b, d, e\}$$

$$N(g) = \{c, f\}$$

# Simpliziale Knoten

**Satz 4.17 (Dirac, 1961)**

Jeder chordale Graph $G = (V, E)$ enthält einen simplizialen Knoten.

**Beweis, Teil 1.**

O.B.d.A.: Graph ist zusammenhängend.

Induktionsanfang: $|V| = 1$ oder $G$ ist vollständig.
Jeder Knoten ist simplizial.

Induktionsschluss:
Annahme: $|V| > 1$ und $G$ ist nicht vollständig.

Sei $W \subset V$. Dann ist $G[W]$ chordal.
Per Induktionsannahme hat $G[W]$ einen simplizialen Knoten.

Finde $W \subset V$ und $w \in W$, so dass:

- $w$ ist simplizial in $G[W]$ und
- $w$ ist simplizial in $G$

# Simpliziale Knoten

## Beweis, Teil 2.

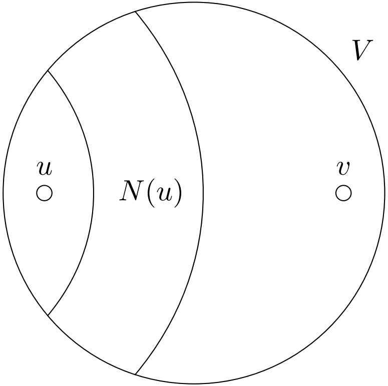
Es existiert $U \subset V$ mit folgenden Eigenschaften:

- $U$ ist zusammenhängend
- $U \cup N(U) \neq V$

Hinweis: $N(U) = \bigcup_{u \in U} N(u) \setminus U$

$G$ ist nicht vollständig.
Es gibt Knoten $u, v \in V$ die nicht adjazent sind.

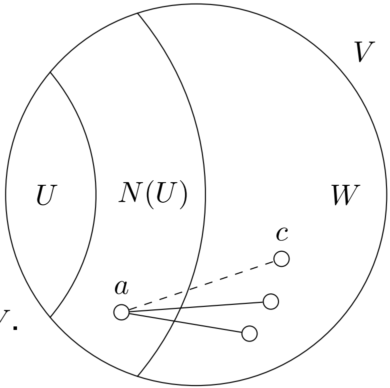
Wähle $U = \{u\}$,
dann $v \notin N(U)$.



# Simpliziale Knoten

## Beweis, Teil 3.

Sei $U \subset V$ die *größte* zusammenhängende Menge mit $U \cup N(U) \neq V$.
Sei $W = V \setminus (U \cup N(U))$.




Behauptung: Jeder Knoten aus $N(U)$
ist zu allen Knoten aus $W$ adjazent.

Sei $a \in N(U)$ nicht zu $c \in W$ adjazent.

Wähle $U' = U \cup \{a\}$.

Dann ist $U'$ zusammenhängend und $U' \cup N(U') \neq V$.
Widerspruch zur Maximalität von $U$. ↯

# Simpliziale Knoten

## Beweis, Teil 4.

Sei $U \subset V$ die *größte* zusammenhängende Menge mit $U \cup N(U) \neq V$.
Sei $W = V \setminus (U \cup N(U))$.

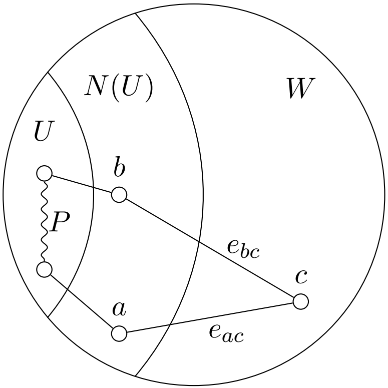
Behauptung: $N(U)$ ist eine Clique.

Seien $a, b \in N(U)$ mit $a \neq b$ nicht adjazent.

Sei $P$ der kürzeste Weg von $a$ nach $b$, welcher nur Knoten aus $U$ berührt.

$P$ muss eine Länge von mindestens $2$ haben.
Dann ist $P' = P \circ (b, e_{bc}, c, e_{ac}, a)$ mit $c \in W$ ein Kreis mit einer Länge von mindestens $4$.

$P'$ hat keine Sehne und $G$ nicht chordal. $\lightning$



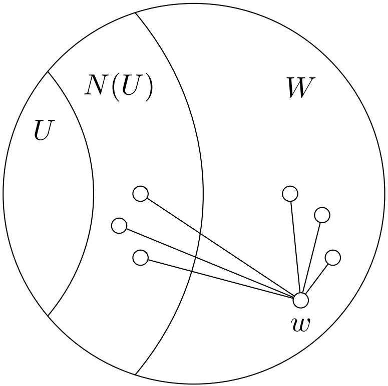
# Simpliziale Knoten

## Beweis, Teil 5.

Wähle $w \in W$ simplizial in $G[W]$,
d.h. $N_{G[W]}(w)$ ist eine Clique.

Zusätzlich gilt:

- $N_G(U)$ ist eine Clique
- Jeder Knoten aus $N_G(U)$ ist zu allen Knoten in $W$ adjazent
- $w$ ist zu keinem Knoten aus $U$ adjazent




$N_G(w)$ ist also ebenfalls eine Clique.

Damit ist $w$ simplizial in $G$.

# Simpliziale Knoten

## Beweis, Teil 5.

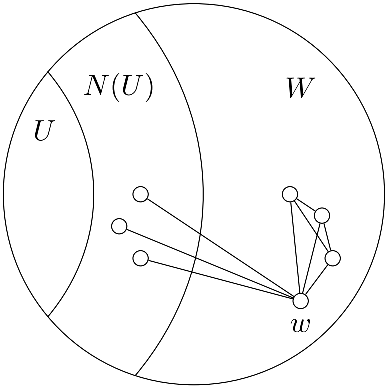
Wähle $w \in W$ simplizial in $G[W]$,
d.h. $N_{G[W]}(w)$ ist eine Clique.

Zusätzlich gilt:

- $N_G(U)$ ist eine Clique
- Jeder Knoten aus $N_G(U)$ ist zu allen Knoten in $W$ adjazent
- $w$ ist zu keinem Knoten aus $U$ adjazent

$N_G(w)$ ist also ebenfalls eine Clique.

Damit ist $w$ simplizial in $G$.



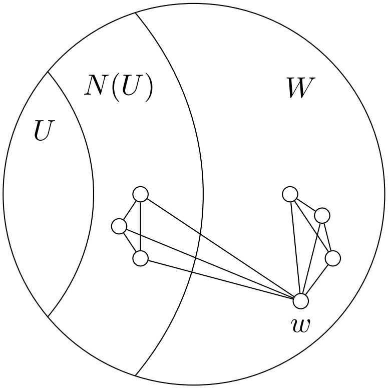
# Simpliziale Knoten

## Beweis, Teil 5.

Wähle $w \in W$ simplizial in $G[W]$,
d.h. $N_{G[W]}(w)$ ist eine Clique.

Zusätzlich gilt:

- $N_G(U)$ ist eine Clique
- Jeder Knoten aus $N_G(U)$ ist zu allen Knoten in $W$ adjazent
- $w$ ist zu keinem Knoten aus $U$ adjazent



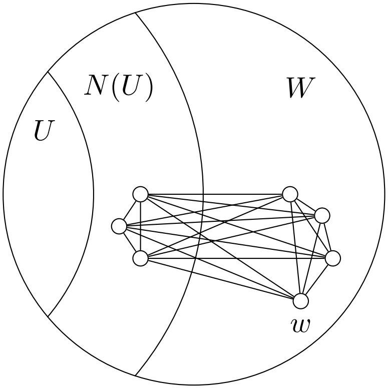

$N_G(w)$ ist also ebenfalls eine Clique.

Damit ist $w$ simplizial in $G$.

# Simpliziale Knoten

## Beweis, Teil 5.

Wähle $w \in W$ simplizial in $G[W]$,
d.h. $N_{G[W]}(w)$ ist eine Clique.




Zusätzlich gilt:

- $N_G(U)$ ist eine Clique
- Jeder Knoten aus $N_G(U)$ ist zu allen Knoten in $W$ adjazent
- $w$ ist zu keinem Knoten aus $U$ adjazent

$N_G(w)$ ist also ebenfalls eine Clique.

Damit ist $w$ simplizial in $G$.

# Chrodale Graphen – Perfektheit

Wiederholung:

- $G$ ist perfekt, wenn $\omega(H) = \chi(H)$ für alle induzierten Subgraphen $H \sqsubseteq G$ ist.
- $G - v$ ist der durch $V(G) \setminus \{v\}$ induzierte Subgraph von $G$.

## Korollar 4.18

Jeder chordale Graph $G = (V, E)$ ist perfekt.

## Beweis, Teil 1.

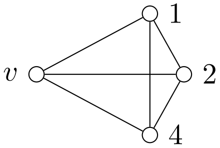
Zeige $\omega(G) = \chi(G)$ für chordalen Graphen $G$. Dann folgt es auch für jeden Subgraphen von $G$, da diese ebenfalls chordal sind.

Induktionsanfang: $|V| = 1$
$\omega(G) = \chi(G) = 1$ □

# Chrodale Graphen – Perfektheit

Beweis, Teil 2.

Induktionsschluss: $|V| > 1$
Wähle simplizialen Knoten $v \in V$.




Induktionsannahme: $\chi(G - v) = \omega(G - v)$

Also reichen $\omega(G) \geq \omega(G - v)$ Farben um $G - v$ zu färben.

Zur Erinnerung: $N(v) \cup \{v\}$ ist eine Clique, d.h. $|N(v)| \leq \omega(G) - 1$.

Färbe erst $G - v$ mit $\omega(G)$ Farben.
Dann bleibt mindestens eine von $\omega(G)$ Farben für $v$ über, da $|N(v)| \leq \omega(G) - 1$.

Wir erhalten also Färbung von $G$ mit $\omega(G)$ Farben und damit gilt $\chi(G) \leq \omega(G)$.

Wie bereits gezeigt gilt auch $\omega(G) \leq \chi(G)$ und damit $\omega(G) = \chi(G)$. $\square$

# Perfekte Eliminationsschemata

Beweis ist konstruktiv, d.h. er liefert einen Algorithmus zum Färben mit der minimalen Anzahl von Farben:

- Wähle simplizialen Knoten $v$
- Färbe $G - v$ per Rekursion
- Färbe $v$

Der Algorithmus liefert ein perfektes Eliminationsschema.

### Definition 4.19

Ein *perfektes Eliminationsschema* ist eine Sequenz $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aller Knoten von $G$ sodass für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt: $v_i$ ist simplizial in $G[\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$.

# Perfekte Eliminationsschemata

**Satz 4.20**
Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann chordal, wenn ein perfektes Eliminationsschema existiert.

**Beweis, Teil 1.**
“$\Rightarrow$”:
Induktionsanfang: $n = 1$
$V = \{v_1\}$ und Sequenz $v_1$ ist ein perfektes Eliminationsschema

Induktionsschluss: $n > 1$
Es existiert ein simplizialer Knoten $v_1$.

Induktionsannahme: $G - v_1$ hat perfektes Eliminationsschema $v_2, \ldots, v_n$.

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist perfektes Eliminationsschema von $G$.

# Perfekte Eliminationsschemata

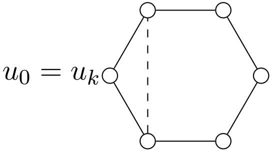
## Beweis, Teil 2.

"$\Leftarrow$":

Sei $C = (u_0, e_1, u_1, \ldots, u_k)$ ein elementarer Kreis der Länge $k \geq 4$.
Sei $v_1, v_2, \ldots v_n$ ein perfektes Eliminationsschema.

Sei $i$ minimal, so dass $v_i \in \{u_0, \ldots, u_k\}$.

Dann ist $\{u_0, \ldots, u_k\} \subseteq \{v_i, \ldots, v_n\}$.




O.B.d.A. sei $u_0 = v_i$.

Dann ist $u_0$ simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$ und $G$ enthält Sehne $[u_1, u_{k-1}]$ $\square$