Graphentheorie
16 – Erdős-Rényi-Graphen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Zufallsgraphen – Grundlagen

Seien X und Y Zufallsereignisse

Rechenregeln Wahrscheinlichkeiten:

- $\mathbb{P}[X \wedge Y] = \mathbb{P}[X \mid Y] \cdot \mathbb{P}[Y]$
- $\mathbb{P}[X \vee Y] = \mathbb{P}[X] + \mathbb{P}[Y] - \mathbb{P}[X \wedge Y]$
  $\leq \mathbb{P}[X] + \mathbb{P}[Y]$ (Union Bound)

X und Y sind genau dann *unabhängig* wenn $\mathbb{P}[X \mid Y] = \mathbb{P}[X]$

Also wenn X und Y unabhängig: $\mathbb{P}[X \wedge Y] = \mathbb{P}[X] \cdot \mathbb{P}[Y]$

Zufallsgraphen – Grundlagen

Seien X und Y Zufallsereignisse

Rechenregeln Wahrscheinlichkeiten:

- $\mathbb{P}[X \wedge Y] = \mathbb{P}[X \mid Y] \cdot \mathbb{P}[Y]$
- $\mathbb{P}[X \vee Y] = \mathbb{P}[X] + \mathbb{P}[Y] - \mathbb{P}[X \wedge Y]$
  $\leq \mathbb{P}[X] + \mathbb{P}[Y]$ (Union Bound)

X und Y sind genau dann *unabhängig* wenn $\mathbb{P}[X \mid Y] = \mathbb{P}[X]$

Also wenn X und Y unabhängig: $\mathbb{P}[X \wedge Y] = \mathbb{P}[X] \cdot \mathbb{P}[Y]$

Beispiel: Sei w die Augenzahl eines Würfels.

$\mathbb{P}[w = 4] = \frac{1}{6}$ $\mathbb{P}[w \geq 4 \mid w \text{ ist gerade}] = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}[w \geq 4 \wedge w \text{ ist gerade}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$

$\mathbb{P}[w \geq 4 \vee w \text{ ist gerade}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

Zufallsgraphen – Grundlagen

Sei X eine Zufallsvariable

Erwartungswert:

- $\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}[X = x]$

Rechenregeln:

- $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ (wenn X und Y unabhängig sind)

Zufallsgraphen – Grundlagen

Sei X eine Zufallsvariable

Erwartungswert:

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x \cdot \mathbb{P}[X = x]$

Rechenregeln:

- $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ (wenn X und Y unabhängig sind)

Beispiel: Seien w_1, w_2 die Augenzahlen von Würfeln.

$\mathbb{E}[w_1] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

$\mathbb{E}[w_1 + w_2] = (1+1)\frac{1}{36} + (1+2)\frac{1}{36} + \ldots + (6+6)\frac{1}{36} = \mathbb{E}[w_1] + \mathbb{E}[w_2] = 7$

Zufallsgraphen – Grundlagen

Lemma (Markov-Ungleichung)

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable.
Dann gilt $\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Beispiel: Sei w die Augenzahl eines Würfels

$\mathbb{P}[w \geq 5] \leq \frac{3.5}{5} = 0.7$

$\mathbb{P}[(w-1) \geq 4] \leq \frac{2.5}{4} = 0.625$

$\mathbb{P}\big[X \geq 2\mathbb{E}[X]\big] \leq \frac{1}{2}$

Erdős-Rényi-Graphen

Definition (Erdős-Rényi-Graphen)

Einfacher Graph $G(n,p) = (V,E)$ mit $|V| = n$ und

- $\mathbb{P}[\ [u,v] \in E\ ] = p$
- $\mathbb{P}[\ [u,v] \notin E\ ] = q = 1 - p$

Für jede Kante e definieren wir Zufallsvariable X_e mit

- $X_e = 1$ wenn $e \in E$.
- $X_e = 0$ wenn $e \notin E$.

$|E| = \sum_e X_e$

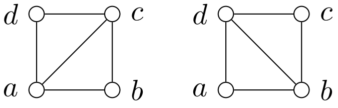
$\mathbb{E}[X_e] = q \cdot 0 + p \cdot 1 = p$

$\mathbb{E}[|E|] = \mathbb{E}[\sum_e X_e] = \sum_e \mathbb{E}[X_e] = \binom{n}{2} p$

Erdős-Rényi-Graphen

Beobachtung

$G(n,p)$ entspricht einem bestimmten Graph mit m Kanten mit W'keit $p^m q^{\binom{n}{2}-m}$



Lemma

Sei $G = G(n,p)$. $\mathbb{P}[\alpha(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$

Beweis.

Betrachte Knotenmenge $U \subseteq V$ mit $|U| = k$.
Mit W'keit $q^{\binom{k}{2}}$ ist U unabhängig.

Es gibt $\binom{n}{k}$ verschiedene Mengen mit k Knoten.
Wende Union Bound an:

$$\mathbb{P}\left[\bigvee_{U \subseteq V \wedge |U|=k} U \text{ ist unabgängig}\right] \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$$

$\square$

Erdős-Rényi-Graphen

Lemma

Sei $G = G(n,p)$. $\mathbb{P}[\omega(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}$

Beweis.

Betrachte Knotenmenge $U \subseteq V$ mit $|U| = k$.
Mit Wahrscheinlichkeit $p^{\binom{k}{2}}$ ist U eine Clique.

Es gibt $\binom{n}{k}$ verschiedene Mengen mit k Knoten.
Wende Union Bound an:

$$\mathbb{P}\left[\bigvee_{U \subseteq V \wedge |U| = k} U \text{ ist Clique}\right] \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}$$

$\square$

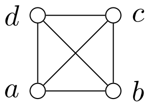
Erdős-Rényi-Graphen

Lemma

Sei X_i die Anzahl der elementaren Kreise mit Länge i in $G(n,p)$.
Dann $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n_{(i)}}{2i} p^i$ wobei $n_{(i)} = \frac{n!}{(n-i)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(i-1))$.

Beweis.

Wähle elementaren Kreis C der Länge i.
C ist in $G(n,p)$ mit der Wahrscheinlichkeit p^i enthalten.



$C = (a,b,c)$
$C' = (a,c,b)$
$C'' = (b,c,a)$

Es gibt $\frac{n_{(i)}}{2i} \leq n^i$ mögliche Kreise der Länge i.

Es gibt n Möglichkeiten den ersten Knoten des Kreises zu wählen,
$n-1$ den zweiten zu wählen, usw.

Man kann den selben Kreis bei i unterschiedlichen Knoten anfangen
und in 2 unterschiedliche Richtungen abschreiten. $\square$

Erdős-Rényi-Graphen

Definition

Die Taillenweite (Girth) $g(G)$ eines Graphen G ist die Länge des kürzesten elementaren Kreises in G.

Satz (Erdős, 1959)

$\forall k, \ell \geq 3 \; \exists G : \chi(G) > k \wedge g(G) > \ell$

Beweis.

Im nächsten Kapitel …

Der Beweis wird nicht konstruktiv sein.
Es wird bewiesen, dass der Graph existiert, ohne ihn dabei zu konstruieren.

Genauer:
Es wird bewiesen, dass Erdős-Rényi-Graphen mit positiver W'keit die gewünschten Eigenschaften haben.