Graphentheorie
17 – Die Probabilistische Methode

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Wiederholung

Definition

Die Taillenweite (Girth) $g(G)$ ist die Länge des kürzesten elementaren Kreises in G.

Lemma

Sei $G = G(n, p)$ und $q = 1 - p$.
Es gilt $\mathbb{P}[\alpha(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$.

Lemma

Sei X_i die Anzahl der Kreise mit Länge i in $G(n, p)$.
Dann $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n_{(i)}}{2i} p^i$ wobei $n_{(i)} = \frac{n!}{(n-i)!} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)$.

Lemma (Markov-Ungleichung)

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable.
Dann gilt $\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Satz von Erdős

Satz (Erdős, 1959)

$\forall k, \ell \geq 3 \ \exists G : \chi(G) > k \wedge g(G) > \ell$

Beweis, Teil 1.

Wir wählen $p = n^{t-1}$ mit $0 < t < 1/\ell$.
Betrachte $G = G(n,p)$.

Sei X_i die Anzahl aller Kreise der Länge i in G. Sei $X_{\leq \ell}$ die Anzahl aller Kreise der Länge $\leq \ell$ in G. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{\leq \ell}] = \sum_{i=3}^{\ell} \mathbb{E}[X_i] &= \sum_{i=3}^{\ell} \frac{n_{(i)}}{2i} p^i \\ &\leq \sum_{i=3}^{\ell} n^i p^i = \sum_{i=3}^{\ell} n^{ti} \leq \ell \cdot n^{t\ell} \in o(n) \end{aligned}$$

Satz von Erdős

Beweis, Teil 2.

Wähle n groß genug, so dass $\mathbb{E}[X_{\leq \ell}] \leq n/4$.
Das ist möglich, da $t\ell < 1$ und somit $\ell \cdot n^{t\ell} \in o(n)$.

Nach Markov-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}\left[X_{\leq \ell} \geq \frac{n}{2}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X_{\leq \ell}]}{n/2} \leq \frac{n/4}{n/2} = \frac{1}{2}$$

Zwischenstand:
Wir haben gezeigt, dass es Graphen gibt die maximal $\frac{n}{2}$ kurze Kreise enthalten.
Aus solchen bauen wir Graphen die *keine* kurzen Kreise mehr enthalten.

Satz von Erdős

Beweis, Teil 3.

Wir wollen nun $\chi(G) > k$ zeigen. Zur Erinnerung: $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.
Betrachten statt dessen $\alpha(G)$.

Wähle $a = \left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil$.

Betrachten Ereignis, dass es unabhängige Menge der Größe a gibt.

Nach dem Lemma oben gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\alpha(G) \geq a] &\leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}} \\
&\leq n^a (e^{-p})^{a(a-1)/2} \\
&= n^a e^{-p \cdot a(a-1)/2} \\
&\leq n^a e^{-3 \ln n \cdot (a-1)/2} \\
&= n^a n^{-3(a-1)/2} = n^{(3-a)/2}
\end{aligned}$$

Hinweise:

$\binom{n}{a} \leq n^a$

$1 - p \leq e^{-p}$

$\binom{a}{2} = a(a-1)/2$

$a \geq \frac{3}{p} \ln n$

Satz von Erdős

Beweis, Teil 4.

Da $0 < p \leq 1$ gilt $a = \left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil \geq 3 \ln n$.
Somit ist der Exponent $(3 - a)/2$ für $n \geq 3$ negativ
und $\mathbb{P}[\alpha(G) \geq a] \leq n^{(3-a)/2}$ geht für $n \to \infty$ gegen 0.

Wähle n groß genug, so dass $\mathbb{P}[\alpha(G) \geq a] < \frac{1}{2}$.

Bereits gezeigt:
Falls n gross genug ist, dann gilt $\mathbb{P}[X_{\leq \ell} \geq \frac{n}{2}] = \frac{1}{2}$.

Anwenden des Union Bound ergibt:

$$\mathbb{P}[X_{\leq \ell} \geq \frac{n}{2} \;\vee\; \alpha(G) \geq a] < 1$$

Satz von Erdős

Beweis, Teil 5.

Falls n gross genug ist gilt

$$\mathbb{P}[X_{\leq \ell} \geq \frac{n}{2} \ \vee \ \alpha(G) \geq a] < 1$$

und somit

$$\mathbb{P}[X_{\leq \ell} < \frac{n}{2} \ \wedge \ \alpha(G) < a] > 0$$

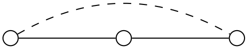
Zwischenstand:
Wir haben gezeigt, dass es Graphen gibt mit

- weniger als $\frac{n}{2}$ Kreisen der Länge höchstens ℓ und
- alle unabhängigen Mengen haben weniger als a Knoten.

Satz von Erdős

Beweis, Teil 6.

Lösche einen Knoten aus jedem der $\frac{n}{2}$ Kreise der Länge höchstens ℓ.
G hat nun keine Kreise der Länge höchstens ℓ.
In G verbleiben mindestens $\frac{n}{2}$ Knoten.



Löschen von Knoten vergrößert $\alpha(G)$ auf keinen Fall.
Weiterhin gilt $\alpha(G) < a = \left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil$ und damit

$p = n^{t-1}$
$0 < t < 1/\ell$

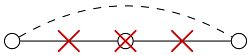
$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} > \frac{n/2}{\left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil} > \frac{n/2}{1 + \frac{3}{p} \ln n} = \frac{np}{2p + 6 \ln n} \geq \frac{n^t}{2 + 6 \ln n}$$

Für genügend große n wird $\frac{n^t}{2+6\ln n}$ größer als k. $\square$

Satz von Erdős

Beweis, Teil 6.

Lösche einen Knoten aus jedem der $\frac{n}{2}$ Kreise der Länge höchstens ℓ.
G hat nun keine Kreise der Länge höchstens ℓ.
In G verbleiben mindestens $\frac{n}{2}$ Knoten.



Löschen von Knoten vergrößert $\alpha(G)$ auf keinen Fall.
Weiterhin gilt $\alpha(G) < a = \left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil$ und damit

$p = n^{t-1}$
$0 < t < 1/\ell$

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} > \frac{n/2}{\left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil} > \frac{n/2}{1 + \frac{3}{p} \ln n} = \frac{np}{2p + 6 \ln n} \geq \frac{n^t}{2 + 6 \ln n}$$

Für genügend große n wird $\frac{n^t}{2+6\ln n}$ größer als k. $\square$