# Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 5

## Hash Tabellen 2: Hashfunktionen, Universelles Hashing, Rehash, Cuckoo Hashing

UNI FREIBURG

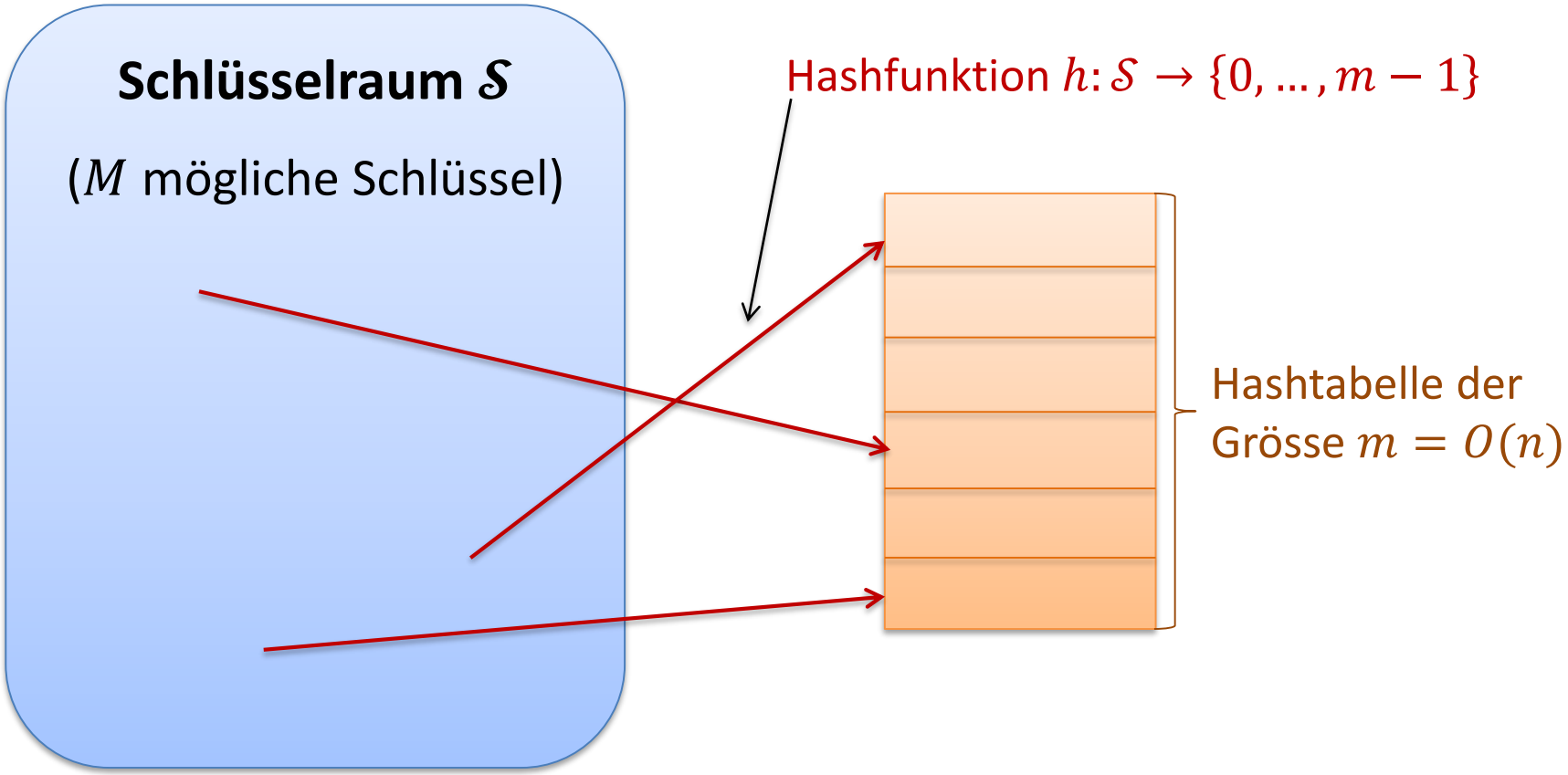
Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

# Hashtabellen

**Implementiert einen Dictionary**

- Verwalten eine Menge an (Schlüssel, Wert)-Paaren
- Hauptoperationen: insert, find, delete



# Hashtabellen



**Wir haben bisher gesehen:**

**effiziente Methode, um einen Dictionary zu implementieren**

- Alle Operationen haben typischerweise $O(1)$ Laufzeit
  - Falls die Hashfunktionen genug zufällig sind und in $O(1)$ Zeit ausgewertet werden können.
  - Die Worst-Case Laufzeit ist etwas höher, in jeder Anwendung von Hashfunktionen wird es ein paar teurere Operationen dabei haben.

**Wir werden uns nun anschauen:**

- Wie wählt man eine gute Hashfunktion?
- Was macht man, wenn die Hashtabelle zu klein wird?
- Man kann Hashing so implementieren, dass find immer in $O(1)$ Zeit implementiert werden kann.

# Gute Hashfunktionen

UNI FREIBURG

**Wie wählt man eine gute Hashfunktion?**

**Was sollte eine gute Hashfunktion erfüllen?**

- Im Prinzip sollte sie die gleichen Eigenschaften wie eine zufällige Funktion haben:
  - Mapping ist uniform zufällig (alle Hashwerte kommen gleich oft vor)
  - Mapping von verschiedenen Schlüsseln ist unabhängig
    (nicht klar, was das bei einer deterministischen Funktion genau heissen soll)
- Man kann diese Bedingungen meistens nicht überprüfen
- Falls man etwas über die Verteilung der Schlüssel weiss, kann man das allenfalls ausnützen
- Es gibt aber zum Glück einfache Heuristiken, welche in der Praxis gut funktionieren

# Divisionsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$h(x) = x \bmod m$$

- Alle Werte zwischen $0$ und $m-1$ kommen gleich oft vor
  - so gut, wie das möglich ist

**Vorteile:**

- Sehr einfache Funktion
- Nur eine Division → kann man schnell berechnen
- Funktioniert oft recht gut, solange man $m$ geschickt wählt...

**Bemerkungen:**

- Falls die Schlüssel keine ganzen Zahlen sind, kann man den Bitstring als ganze Zahl interpretieren
- Aufeinanderfolgende Schlüssel werden auf aufeinanderfolgende Hashwerte abgebildet

# Divisionsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$h(x) = x \bmod m$$

**Wahl des Divisors $m$**

- Man könnte $h(x)$ besonders schnell berechnen falls $m = 2^k$
- Das ist aber keine gute Wahl, da man dann einfach die letzten $k$ Bits als Hashwert bekommt!
  - Der Hashwert sollte von allen Bits abhängen
- Am besten wählt man $m$ als Primzahl
- Eine Primzahl $m$, so dass $m = 2^k - 1$ ist auch keine gute Idee
- Am besten: Primzahl $m$, welche nicht nahe bei einer 2er-Potenz ist

# Multiplikationsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$h(x) = \lfloor m \cdot (\underbrace{Ax - \lfloor Ax \rfloor}_{0 \le Ax - \lfloor Ax \rfloor < 1}) \rfloor$$

- $A$ ist eine Konstante zwischen 0 und 1

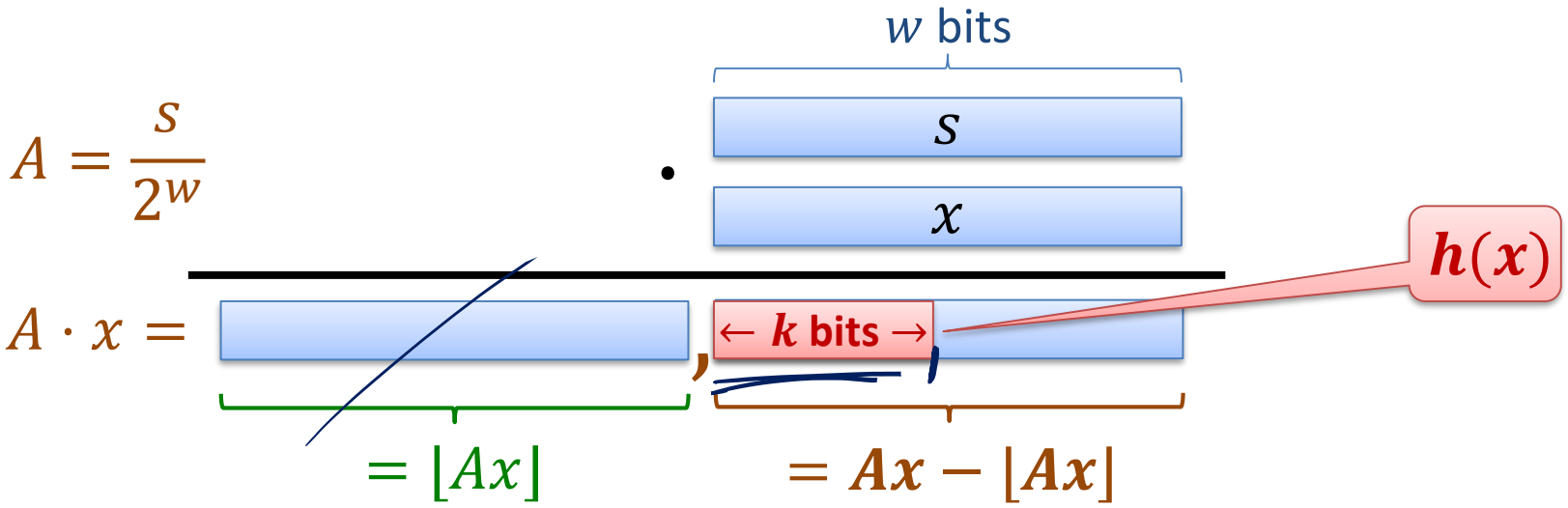
$\lfloor y \rfloor$

$\lfloor 1{,}7 \rfloor = 1$

$\lceil 1{,}7 \rceil = 2$

**Bemerkungen**

- Hier kann man $m = 2^k$ wählen (für Integer $k$)
- Falls Integers von 0 bis $2^w - 1$ gehen, wählt man typischerweise einen Integer $s \in \{1, \dots, 2^w - 1\}$ und $A = s \cdot 2^{-w}$



# Multiplikationsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$\boldsymbol{h(x) = \lfloor m \cdot (Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor}$$

- $A$ ist eine Konstante zwischen 0 und 1

**Bemerkungen**

- Hier kann man $m = 2^k$ wählen (für Integer $k$)
- Falls Integers von 0 bis $2^w - 1$ gehen, wählt man typischerweise einen Integer $s \in \{1, \dots, 2^w - 1\}$ und $A = s \cdot 2^{-w}$

  - Grundsätzlich funktioniert jedes $A$, in [Knuth; The Art of Comp. Progr. Vol. 3] wird empfohlen, dass

$$A \approx \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.6180339887 \dots$$

# Zufällige Hashfunktionen

Falls $h$ zufällig aus allen möglichen Funktionen ausgewählt wird:

$$\forall x_1, x_2 : \Pr\big(h(x_1) = h(x_2)\big) = \frac{1}{m}$$

und viele weitere gute Eigenschaften …

**Problem:**

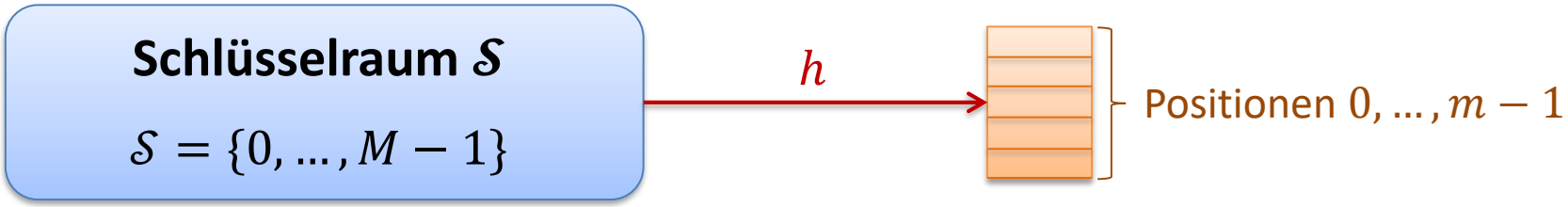
- eine solche Funktion kann nicht effizient repräsentiert und ausgewertet werden
  - Im Wesentlichen braucht man eine Tabelle mit allen möglichen Schlüsseln

**Idee:**

- Eine Funktion zufällig aus einem kleineren Bereich wählen
  - z.B. bei Multiplikationsmethode $h(x) = \lfloor m \cdot (Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor$ einfach den Parameter $A$ zufällig wählen
- Nicht ganz so gut, wie eine uniform zufällige Funktion, aber wenn man's richtig macht, funktioniert die Idee → **universelles Hashing**

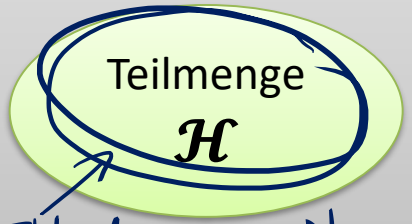
# Universelles Hashing : Idee

**Hashfunktionen:** $h: S \to \{0, \dots, m-1\}$




## Raum aller möglichen Hashfunktionen

**Mögliche Hashfunktionen**
(Anz. Funktionen: $m^M$)




Bsp: alle Fkt, die man mit der Mult.-methode bekommt

**Wähle $\mathcal{H}$ so, dass:**

- $|\mathcal{H}|$ nicht allzu gross ist und Funktionen in $\mathcal{H}$ einfach zu implementieren sind
- Eine zufällige Funktion $h$ aus $\mathcal{H}$ verhält sich ähnlich, wie eine zufällige Funktion
- Insb. bezügl. Kollisionswahrscheinlichkeit:

$$\forall x_1, x_2 : \Pr\big(h(x_1) = h(x_2)\big) \approx \frac{1}{m}$$

# Universelles Hashing : Definition

**Definition:**

- Sei $S$ die Menge der mögl. Schlüssel und $m$ die Grösse der Hashtab.
- Sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Hashfunktionen $S \to \{0, \dots, m-1\}$

**Die Menge $\mathcal{H}$ heisst $c$-universell, falls**

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Longrightarrow |\{h \in \mathcal{H} : h(x) = h(y)\}| \leq c \cdot \frac{|\mathcal{H}|}{m}.$$

- Mit anderen Worten, falls man $h$ zufällig aus $\mathcal{H}$ wählt, dann gilt

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Longrightarrow \Pr\big(h(x) = h(y)\big) \leq \frac{c}{m}$$

$$\frac{c \cdot \frac{|\mathcal{H}|}{m}}{|\mathcal{H}|}$$

- **Bemerkung:**
  Die Menge $\mathcal{H}$ aller $m^M$ möglichen Hashfunktionen ist 1-universell.

# Universelles Hashing : Listenlängen

**Theorem:**

- Sei $\mathcal{H}$ eine $c$-universelle Menge von Hashfkt. $\mathcal{S} \to \{0, \dots, m-1\}$
- Sei $X \subset \mathcal{S}$ eine beliebige Menge von Schlüsseln
- Sei $h \in \mathcal{H}$ eine zufällig gewählte Fkt. aus $\mathcal{H}$

$\forall x, y \in X : \mathbb{P}(h(x) = h(y)) \leq \frac{c}{m}$

- Für ein gegebenes $x \in X$ sei

$$B_x := \{y \in X : h(y) = h(x)\}$$

$\alpha = \frac{|X|}{m}$

- Im Erwartungswert hat $B_x$ Grösse $< 1 + c \cdot \frac{|X|}{m}$

$O(1)$ falls $\alpha, c \in O(1)$

**Konsequenz:**

- Im Erwartungswert sind alle Listen kurz!

# Universelles Hashing : Beispiele I

**Die Menge $\mathcal{H}$ heisst $c$-universell, falls**

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Rightarrow |\{h \in \mathcal{H} : h(x) = h(y)\}| \leq c \cdot \frac{|\mathcal{H}|}{m}.$$

**Negatives Beispiel:**

- Parametriesierte Variante der Divisionsmethode

$$\mathcal{H} = \{h : x \to a \cdot x \mod m \text{ for } a \in \{1, \dots, M-1\}\}$$

- Gegenbeispiel: wähle beliebiges $x$ und wähle $y = x + m$
  - $h(x) = a \cdot x \mod m$
  - $h(y) = a \cdot (x + m) \mod m = (a \cdot x + a \cdot m) \mod m = a \cdot x \mod m$

# Universelles Hashing : Beispiele II

**Die Menge $\mathcal{H}$ heisst $c$-universell, falls**

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Rightarrow |\{h \in \mathcal{H} : h(x) = h(y)\}| \leq c \cdot \frac{|\mathcal{H}|}{m}.$$

**Positives Beispiel 1:**

- $m$ beliebig, $p$: Primzahl mit $p > M$ ($M = |S|$)

$$\mathcal{H} = \{h : x \to ((a \cdot x + b) \bmod p) \bmod m \quad \text{for } a, b \in \mathcal{S}, a \neq 0\}$$

- Die Familie ist $c$-universell für $c \approx 1$, falls $p \approx M$
- Für $x, y$ gilt $h(x) = h(y)$, falls für ein $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(ax + b) \bmod p = (ay + b) \bmod p + i \cdot m$$

gilt für höchstens $2 \cdot \left\lfloor \frac{p-1}{m} \right\rfloor + 1$ versch. $i$-Werte

$$a \equiv i \cdot m \cdot (x - y)^{-1} \pmod{p}$$

- Für jedes $x$ und $y$ und jedes $b$ gibt es also für jedes mögliche $i$ nur einen Wert $a$, für welchen $x$ und $y$ kollidieren.

# Universelles Hashing : Beispiele III

**Die Menge $\mathcal{H}$ heisst $c$-universell, falls**

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Rightarrow |\{h \in \mathcal{H} : h(x) = h(y)\}| \leq c \cdot \frac{|\mathcal{H}|}{m}.$$

**Positives Beispiel 2:**

- $m$ Primzahl, $k = \lfloor \log_m M \rfloor$, Parameter $a \in \mathcal{S} = \{0, \dots, M-1\}$
- Betrachte Parameter $a$ und Schlüssel $x$ in Basis-$m$ Darstellung:

$$a = a_0 + a_1 \cdot m + a_2 \cdot m^2 + \cdots + a_k \cdot m^k$$
$$x = x_0 + x_1 \cdot m + x_2 \cdot m^2 + \cdots + x_k \cdot m^k$$

$a_i, x_i \in \{0, \dots, m-1\}$

$$\mathcal{H} = \left\{ h : x \to \left( \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x_i \right) \bmod m \text{ for } a_i \in \{0, \dots, m-1\} \right\}$$

- Die Menge $\mathcal{H}$ ist 1-universell

# Universelles Hashing : Zusammenfassung

- Wenn man die Hashfunktion zufällig aus einer universellen Menge von Hashfunktionen wählt, ist die Kollisionswahrscheinlichkeit für zwei Schlüssel $x$ und $y$ gleich, wie bei einer zufälligen Fkt.
- Es gibt einfache und effiziente Konstruktionen von universellen Mengen von Hashfunktionen

**Man kann noch weiter gehen:**

- Paarweise unabhängige Mengen von Hashfunktionen

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \forall a, b \in \mathbb{Z}_m : \Pr(h(x) = a \ \wedge \ h(y) = b) = \frac{1}{m^2}$$

  - eine zufällige Funktion aus einer solchen Menge verhält sich für alle Paare $x, y$ genau gleich wie eine zufällige Funktion (nicht nur bezügl. Kollisionen)

- $k$-fach unabhängige Mengen von Hashfunktionen
  - eine zufällige Funktion aus einer solchen Menge verhält sich für alle $k$ verschiedenen Schlüssel genau gleich wie eine zufällige Funktion

# Rehash

**Erinnerung:**

- Load einer Hashtabelle: $\alpha = n/m$

**Was tun, wenn die Hashtabelle zu voll wird?**

- Offene Adressierung:
  - $\alpha > 1$ nicht möglich, bei $\alpha \to 1$ sehr ineffizient
  - wenn man viel eingefügt und wieder gelöscht hat, wird es auch ineffizient (wegen der delete-Markierungen)
- Chaining: Komplexität wächst linear mit $\alpha$

**Was tun, wenn die gewählte Hashfunktion schlecht ist?**

**Rehash:**

- Erstelle neue, grössere Hashtabelle, wähle neue Hashfunktion $h'$
- Füge alle Schlüssel/Werte neu ein

# Kosten Rehash

Ein Rehash ist teuer!

**Kosten (Zeit):**

- $\Theta(m+n)$ : linear in der Anzahl eingefügten Elemente und der Länge der alten Hashtabelle
  - typischerweise ist das einfach $\Theta(n)$

- **Wenn man es richtig macht, ist ein Rehash selten nötig:**
  - gute Hashfunktion (z.B. aus einer universellen Klasse)
  - gute Wahl der Tabellengrössen:

    bei jedem **Rehash** sollte die **Tabellengrösse** etwa **verdoppelt** werden

    alte Grösse $m$ $\Longrightarrow$ neue Grösse $\approx 2m$
  - Verdoppeln ergibt immer noch durchschnittlich konstante Zeit pro Hashtabellen-Operation
    → amortisierte Analyse

# Kosten Rehash

UNI FREIBURG

**Analyse Verdoppelungsstrategie**

- Wir machen ein paar vereinfachende Annahmen:
  - Bis zu Load $\alpha_0$ (z.B. $\alpha_0 = {}^1/_2$) kosten alle Hashtabellen-Operationen $\leq c$
  - Bei Load $\alpha_0$ wird die Tabellengrösse verdoppelt:
    Alte Grösse $m$, neue Grösse $2m$, Kosten $\leq c \cdot m$
  - Am Anfang hat die Tabelle Grösse $m_0 \in O(1)$
  - Die Tabelle wird nie verkleinert…

- Wie gross sind die Kosten für das Rehashing, verglichen mit den Gesamtkosten für alle anderen Operationen?

# Kosten Rehash

## Gesamtkosten

- Wir nehmen an, dass die Tabellengrösse $m = m_0 \cdot 2^k$ für $k \geq 1$ ist
  - d.h., bis jetzt haben wir $k \geq 1$ Rehash-Schritte gemacht
  - Bemerkung: Bei $k = 0$ sind die Rehash-Kosten $0$.
- Die Gesamt-Rehash-Kosten sind dann

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} c \cdot m_0 \cdot 2^i = c \cdot m_0 \cdot \left(2^k - 1\right) \leq c \cdot m$$

- Gesamt-Kosten für die übrigen Operationen
  - Beim Rehash von Grösse $m/2$ auf $m$ waren $\geq \alpha_0 \cdot m/2$ Einträge in der Tabelle
  - Anzahl Hashtabellen-Operationen (ohne Rehash)

$$\geq \frac{\alpha_0}{2} \cdot m$$

# Kosten Rehash

- Die Gesamt-Rehash-Kosten sind dann

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} c \cdot m_0 \cdot 2^i = c \cdot m_0 \cdot \left(2^k - 1\right) \leq c \cdot m$$

- Anzahl Hashtabellen-Operationen

$$\#\mathrm{OP} \geq \frac{\alpha_0}{2} \cdot m$$

- Durchschnittskosten pro Operation

$$\frac{\#\mathbf{OP} \cdot c + \mathbf{Rehash\_Kosten}}{\#\mathbf{OP}} \leq c + \frac{2c}{\alpha_0} \in O(1)$$

- Im Durschnitt sind die Kosten pro Operation konstant
  - auch für worst-case Eingaben (solange die Annahmen zutreffen)
  - **Durschnittskosten pro Operation = amortisierte Kosten der Operation**

# Amortisierte Analyse

UNI FREIBURG

**Algorithmenanalyse bisher:**

- worst case, best case, average case

Jetzt zusätzlich **amortized worst case**:

- $n$ Operationen $o_1, \dots, o_n$ auf einer Datenstruktur, $t_i$: Kosten von $o_i$
- Kosten können sehr unterschiedlich sein (z.B. $t_i \in [1, c \cdot i]$)
- Amortisierte Kosten pro Operation

$$\frac{T}{n}, \qquad \text{wobei } T = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

- **Amortisierte Kosten:** Durchschnittskosten pro Operation bei einer worst-case Ausführung
  - amortized worst case ≠ average case!
- Mehr dazu in der Algorithmentheorie-Vorlesung

# Amortisierte Analyse Rehash

UNI FREIBURG

- Falls man immer nur vergrössert und davon ausgeht, dass bei kleinem Load, Hashtabellenop. $O(1)$ Kosten haben, sind die amortisierten Kosten pro Operation $O(1)$.
- Analyse funktioniert auch bei zufälliger Hashfunktion aus universeller Familie (mit hoher Wahrscheinlichkeit)
  - dann haben Hashtabellen-Op. bei kleinem Load mit hoher Wahrscheinlichkeit amortisierte Kosten $O(1)$
- Die Analyse lässt sich auch auf Rehashs zum Verkleinern erweitern
  - Und auch auf Fälle, wo man aufgrund von vielen delete-Operationen, einen Rehash machen muss
- In einer ähnlichen Art kann man aus fixed-size Arrays dynamische Arrays bauen
  - Alle Arrayoperationen haben dann $O(1)$ amortisierte Laufzeit
  - Vergrössern/verkleinern erlaubt der ADT nur in 1-Elem.-Schritten am Ende!

# Cuckoo Hashing Idee

UNI FREIBURG

**Hashing Zusammenfassung:**

- effiziente Dictionary-Datenstruktur
- Operationen brauchen im Erwartungswert (meistens) $O(1)$ Zeit
- Hashing mit Chaining kann man so implementieren, dass insert immer $O(1)$ Laufzeit hat
- Können wir auch bei **find $O(1)$ Laufzeit** garantieren?
  - wenn gleichzeitig insert nur noch im Erwartungswert $O(1)$ ist…

**Cuckoo Hashing Idee:**

- Offene Adressierung
  - an jeder Position der Tabelle hat es nur für ein Element Platz
- Zwei Hashfunktionen $h_1$ und $h_2$
- Ein Schlüssel $x$ wird immer bei $h_1(x)$ oder $h_2(x)$ gespeichert
  - Falls beim Einfügen beide Stellen schon besetzt sind, müssen wir umorganisieren…

# Cuckoo Hashing

UNI FREIBURG

**Enfügen eines Schlüssels $x$:**

- $x$ wird immer an der Stelle $h_1(x)$ eingefügt
- Falls schon ein anderer Schlüssel $y$ an der Stelle $h_1(x)$ ist:
  - Werfe $y$ da raus (daher der Name: Cuckoo Hashing)
  - $y$ muss an seiner alternativen Stelle eingefügt werden (falls es bei $h_1(y)$ war, an Stelle $h_2(y)$, sonst an Stelle $h_1(y)$)
  - falls da auch schon ein Element $z$ ist, werfe $z$ raus und platziere es an seiner Alternativposition
  - und so weiter…

**Find / Delete:**

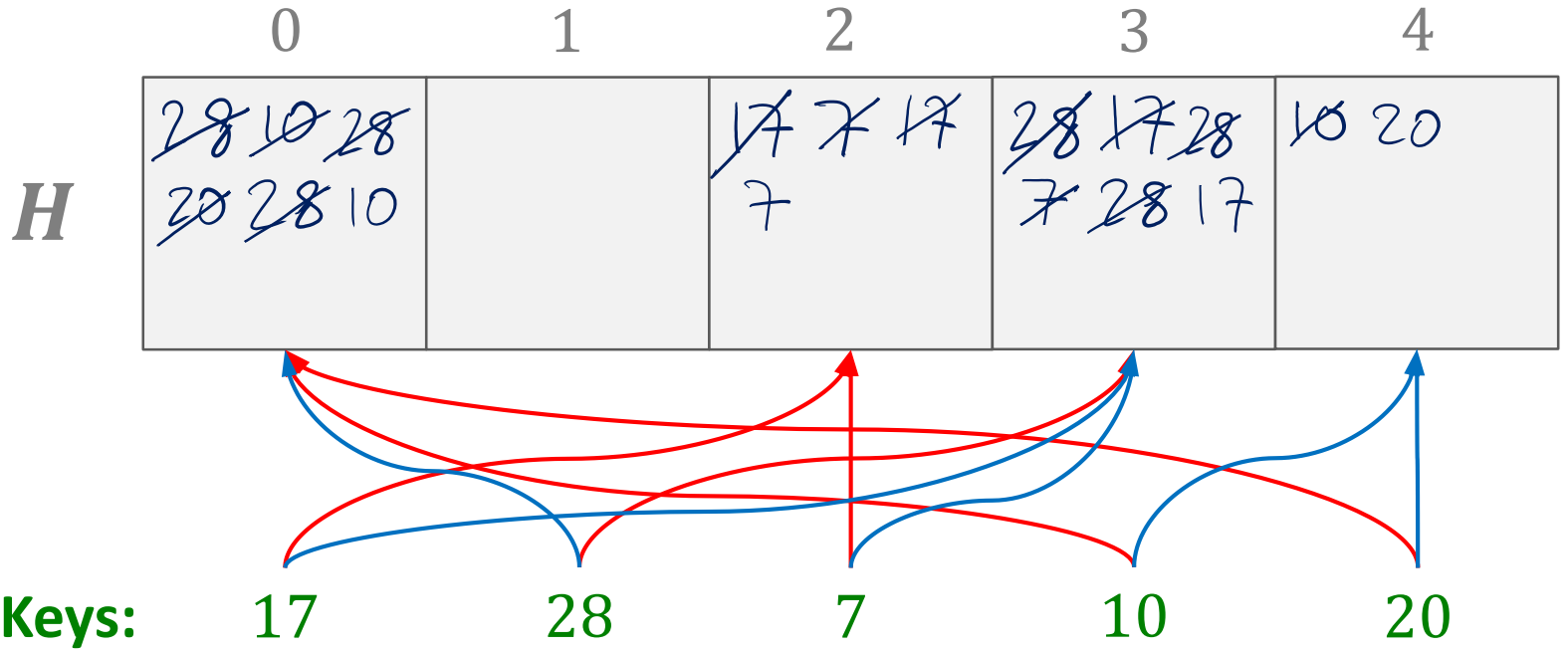
- Falls $x$ in der Tabelle ist, ist's an Stelle $h_1(x)$ oder $h_2(x)$
- bei Delete: Markiere Zelle als leer!
- beide Operationen immer $O(1)$ Zeit!

# Cuckoo Hashing Beispiel

Tabellengrösse $m = 5$

Hashfunktionen $h_1(x) = x \bmod 5$, $h_2(x) = 2x - 1 \bmod 5$

Füge Schlüssel 17, 28, 7, 10, 20 ein:



# Cuckoo Hashing : Zyklen

- Beim Einfügen kann es zu einem Zyklus kommen
  - $x$ wirft $y_1$ raus
  - $y_1$ wirft $y_2$ raus
  - $y_2$ wirft $y_3$ raus
  - …
  - $y_{\ell-1}$ wirft $y_\ell$ raus
  - $y_\ell$ wirft $x$ oder $y_i$ für $i < \ell$ raus
- Oder es kann irgendwann sein, dass $h_1(y_i) = h_2(y_i)$
- Dann wird noch der alternative Platz für $x$ ausprobiert, aber da kann das Gleiche auch wieder passieren…
- In dem Fall wählt man neue Hash-Funktionen und macht einen Rehash (normalerweise mit grösserer Tabelle)

# Cuckoo Hashing : Hashfunktionen

**Wie wählt man die zwei Hashfunktionen?**

- Sie sollten möglichst “unabhängig” sein…
- Wenige Schlüssel $x$, für welche $h_1(x) = h_2(x)$
- Eine gute Möglichkeit:

  **Zwei unabhängige, zufällige Funktionen einer universellen Menge**

- Dann kann man zeigen, dass Zyklen nur sehr selten vorkommen, solange $n \leq m/2$

- Sobald die Tabelle halbvoll ist ($n \geq m/2$) sollte man daher einen Rehash machen und zu einer doppelt so grossen Tabelle wechseln

# Cuckoo Hashing : Laufzeit

UNI FREIBURG

**Find / Delete:**

- Hat immer Laufzeit $O(1)$
- Man muss nur die zwei Stellen $h_1(x)$ und $h_2(x)$ anschauen
- Das ist der grosse Vorteil von Cuckoo Hashing

**Insert:**

- Man kann zeigen, dass das im Durchschnitt auch Zeit $O(1)$ braucht
- Falls man die Tabelle nicht mehr als zur Hälfte füllt
- Verdoppeln der Tabellengrösse bei Rehash ergibt konstante durchschnittliche Laufzeit für alle Operationen!

# Zusammenfassung Hashing

UNI FREIBURG

**effiziente Methode, um einen Dictionary zu implementieren**

## Behandeln von Kollisionen

- Hashing mit Chaining
  - Einfach, sehr flexibel, mit 2 Hash Funktionen kann man die Listenlängen mit hoher Wahrscheinlichkeit auf $O(\log \log n)$ beschränken
- Offene Adressierung
  - Verschiedene Möglichkeiten, in der Praxis typischerweise effizienter
  - Es ist möglich, find in worst-case $O(1)$ Zeit zu implementieren
  - Load $\alpha > 1$ nicht möglich, falls $\alpha$ gross wird, muss man einen Rehash machen

## Hashfunktionen

- Es gibt Strategien, um einfach gute Hashfunktionen zu erhalten
  - In der Praxis wird oft eine fixe, recht einfache Funktion verwendet

## Rehash

- Wenn die Hashtabelle zu voll wird, muss man neu aufsetzen
  - Das kann man so machen, dass die Gesamtlaufzeit pro Hashtabellenoperation konstant bleibt