Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 8

Graphenalgorithmen I:
BFS- und DFS Traversierung

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn
Algorithmen und Komplexität

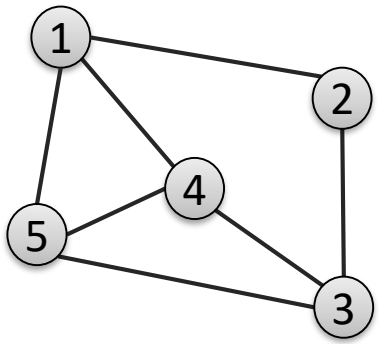
Graphen

Knotenmenge V, typischerweise $n := |V|$ (English: **v**ertex or node)

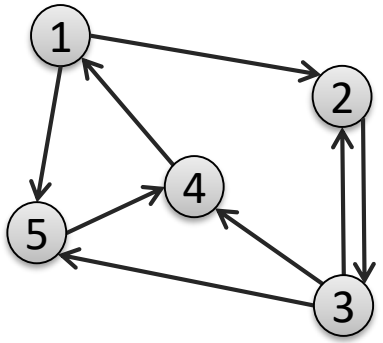
Kantenmenge E, typischerweise $m := |E|$ (English: **e**dge)

- ungerichteter Graph: $E \subseteq \{\{u,v\} : u,v \in V\}$
- gerichteter Graph: $E \subseteq V \times V$

Beispiele:



$V = \{1,2,3,4,5\}$
$E = \{(1,2),(1,5),(2,3),(3,4),(3,4),(3,5),(4,1),(5,4)\}$



$V = \{1,2,3,4,5\}$
$E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$

Knotengrade

Graph $G = (V, E)$ ungerichtet:

- Grad eines Knoten $u \in V$: Anzahl Kanten (Nachbarn) von u

$$\deg(u) := |\{v : \{u, v\} \in E\}|$$

Graph $G = (V, E)$ gerichtet:

- Eingangsgrad eines Knoten $u \in V$: Anzahl eingehende Kanten

$$\deg_{in}(u) := |\{v : (v, u) \in E\}|$$

- Ausgangsgrad eines Knoten $u \in V$: Anzahl ausgehende Kanten

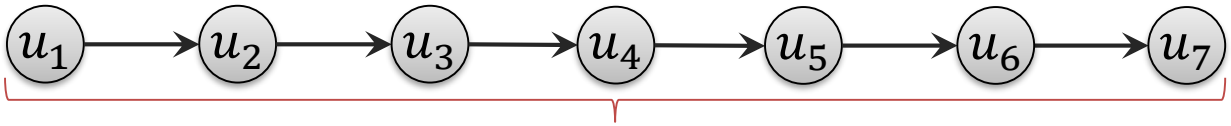
$$\deg_{out}(u) := |\{v : (u, v) \in E\}|$$

Pfade

Pfade in einem Graph $G = (V, E)$

- Pfad in G : eine Folge $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ mit $u_i \neq u_j$ (falls $i \neq j$)
  - gerichteter Graph: $(u_i, u_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
  - ungerichteter Graph: $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$

Pfad, gerichtet:



Länge des Pfades: 6

Pfad, ungerichtet:

Länge eines Pfades

- Anzahl der Kanten des Pfades
- mit Kantengewichten: Summe der Kantengewichte

Pfade

UNI FREIBURG

Pfade in einem Graph $G = (V, E)$

- Pfad in G : eine Folge $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ mit $u_i \neq u_j$ (falls $i \neq j$)
  - gerichteter Graph: $(u_i, u_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
  - ungerichteter Graph: $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$

Länge eines Pfades

- ohne Kantengewichte: Anzahl der Kanten
- mit Kantengewichten: Summe der Kantengewichte

Kürzester Pfad (shortest path) zwischen Knoten u und v

- Pfad $u, \dots, v$ mit kleinster Länge
- **Distanz** $d_G(u, v)$: Länge eines kürzesten Pfades zwischen u und v

Durchmesser $\boldsymbol{D := \max_{u,v \in V} d_G(u, v)}$

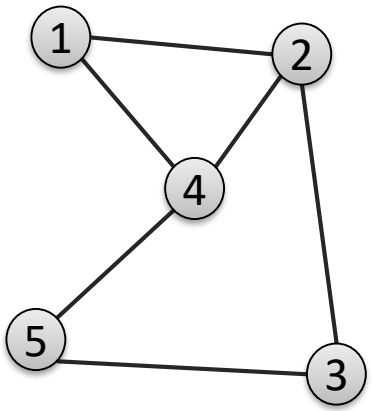
- Länge des längsten kürzesten Pfades

Repräsentation von Graphen

Zwei klassische Arten, einen Graphen im Rechner zu repräsentieren

- **Adjazenzmatrix:** Platzverbrauch $\Theta(|V|^2) = \Theta(n^2)$
- **Adjazenzlisten:** Platzverbrauch $\Theta(|V| + |E|) = \Theta(n + m) = O(n^2)$

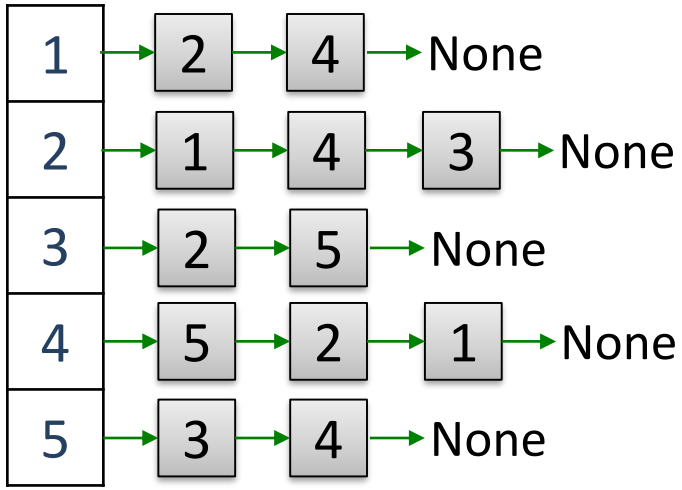
Beispiel:



Adjazenzmatrix

	1	2	3	4	5
1	0	**1**	0	**1**	0
2	**1**	0	**1**	**1**	0
3	0	**1**	0	0	**1**
4	**1**	**1**	0	0	**1**
5	0	0	**1**	**1**	0

Adjazenzlisten



Adjazenzmatrix

Details:

- Bei **Kantengewichten**, trägt man die Gewichte (statt $0/1$) in die Matrix ein (implizit: Gewicht 0 = Kante existiert nicht)
- **Gerichtete Graphen:** Ein Eintrag pro gerichtete Kante
  - Kante von i nach j: Eintrag in Zeile i und Spalte j
- **Ungerichtete Graphen:** Zwei Einträge pro Kante
  - Matrix ist in diesem Fall symmetrisch

Eigenschaften Adjazenzmatrix:

- Speichereffizient, falls $|E| = m \in \Theta(|V|^2) = \Theta(n^2)$
  - speziell für ungewichtete Graphen: nur ein Bit pro Matrixeintrag
- Nicht speichereffizient bei dünn besetzten Graphen ($m \in o(n^2)$)
- Für gewisse Algorithmen, die "richtige" Datenstruktur
- "Kante zwischen u und v" kann in $O(1)$ Zeit beantwortet werden

Adjazenzlisten

UNI FREIBURG

Struktur

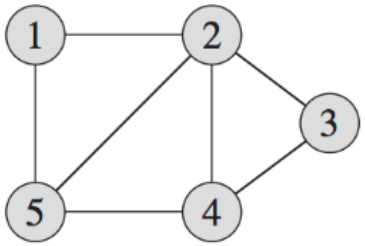
- Ein Array mit allen Knoten
- Einträge in diesem Knotenarray (oder der Liste):
  - Verkettete Listen (Arrays) mit allen Kanten des Knoten

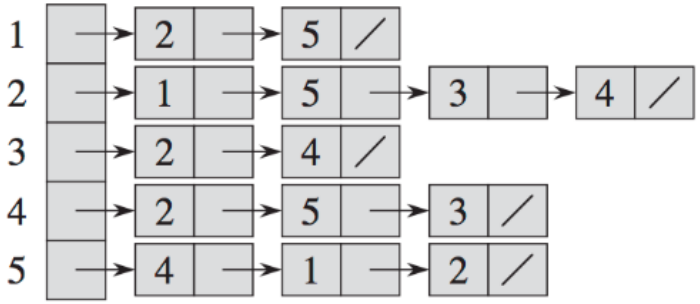
Eigenschaften

- Speichereffizient bei dünn besetzten Graphen
- Speichereffizienz immer (fast) asymptotisch optimal
  - aber bei dicht besetzten Graphen trotzdem deutlich schlechter
  - Wenn man's streng sieht, braucht man wohl $O(\log n)$ Bits pro Knoten
- Abfragen nach bestimmten Kanten nicht besonders schnell
  - Falls nötig, eine zusätzliche Datenstruktur (z.B. Hashtabelle) anlegen
- Für viele Algorithmen, die "richtige" Datenstruktur
- Z.B. für Tiefensuche (und Breitensuche)

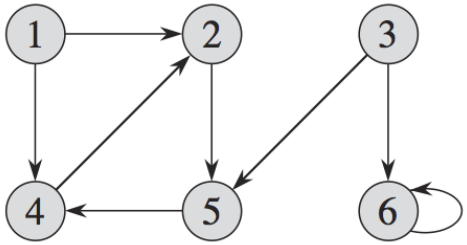
Beispiele

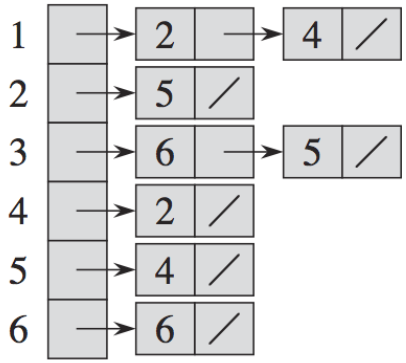
Beispiele aus [CLRS]:





	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0





	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Graph-Traversierung

UNI FREIBURG

Graph-Traversierung (Graph-Exploration) informell

- Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $s \in V$, besuche "systematisch" alle Knoten, welche von s aus erreichbar sind.
- Das haben wir bereits bei den Binärbäumen gesehen
- Wie bei den Bäumen gibt es zwei grundsätzliche Verfahren

- **Breitensuche (BFS = breadth first search)**
  - zuerst "in die Breite" (nähere Knoten zu s zuerst)

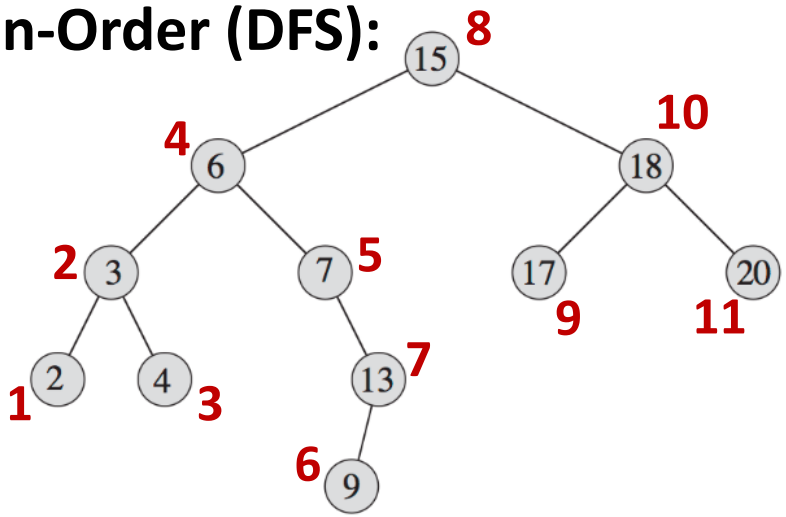
- **Tiefensuche (DFS = depth first search)**
  - zuerst "in die Tiefe" (besuche alles, was an einem Knoten u "dranhängt", bevor der nächste Nachbar von u besucht wird)

- Graph-Traversierung ist wichtig, da es oft als Subroutine auftaucht
  - z.B., um die Zusammenhangskomponenten eines Graphen zu finden
  - Wir werden einige Beispiele sehen…

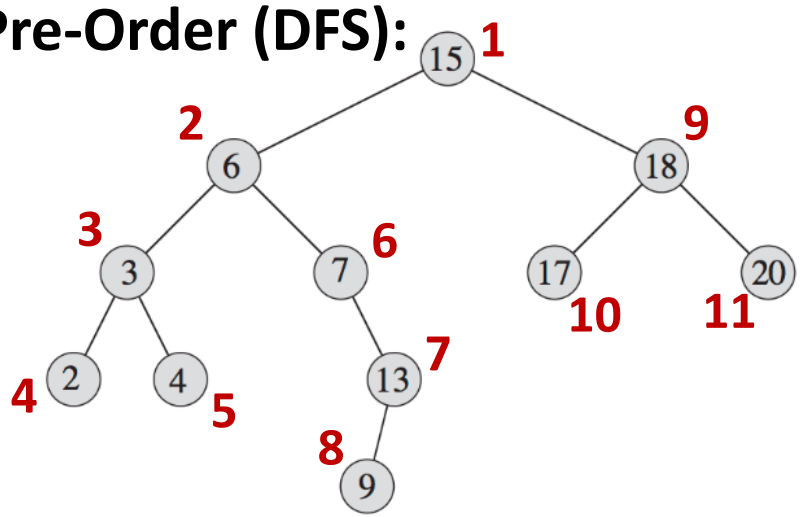
Traversieren eines binären Suchbaums

Ziel: Besuche alle Knoten eines binären Suchbaums einmal

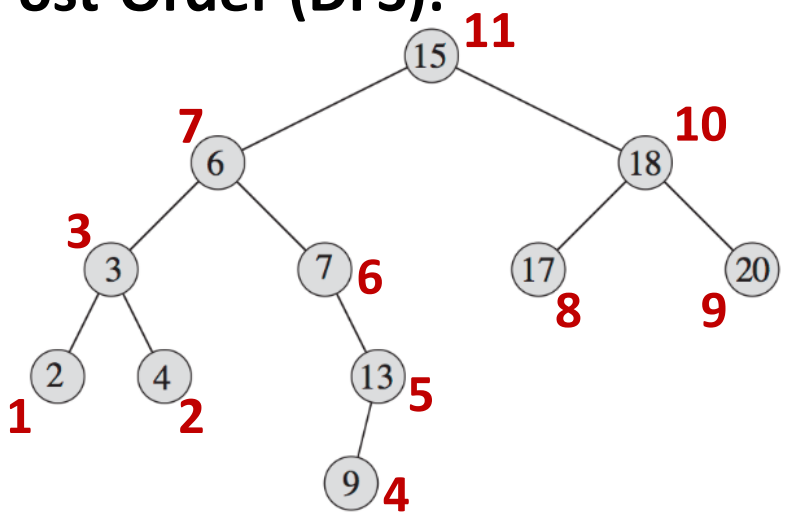
In-Order (DFS):



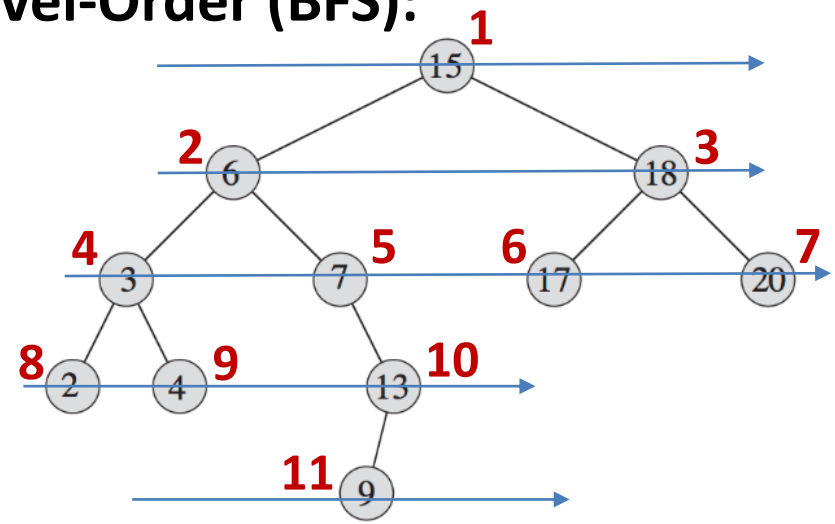
Pre-Order (DFS):



Post-Order (DFS):



Level-Order (BFS):



Breitensuche (BFS Traversierung)

UNI FREIBURG

- Lösung mit einer Warteschlange:
  - Wenn ein Knoten besucht wird, werden seine Kinder in die Queue eingereiht

```
BFS-Traversal:
    Q = new Queue()
    Q.enqueue(root)
    while not Q.empty() do
        node = Q.dequeue()
        visit(node)
        if node.left != null
            Q.enqueue(node.left)
        if node.right != null
            Q.enqueue(node.right)
```

Breitensuche von allgemeinen Graphen

UNI FREIBURG

Unterschiede Binärbaum T $\Leftrightarrow$ allg. Graph G

- Graph G kann Zyklen haben
- In T haben wir eine Wurzel und kennen von jedem Knoten die Richtung zur Wurzel
  - etwas allgemeiner bezeichnen wir solche Bäume auch als gewurzelte Bäume

Breitensuche in Graph G (Start bei Knoten $s \in V$)

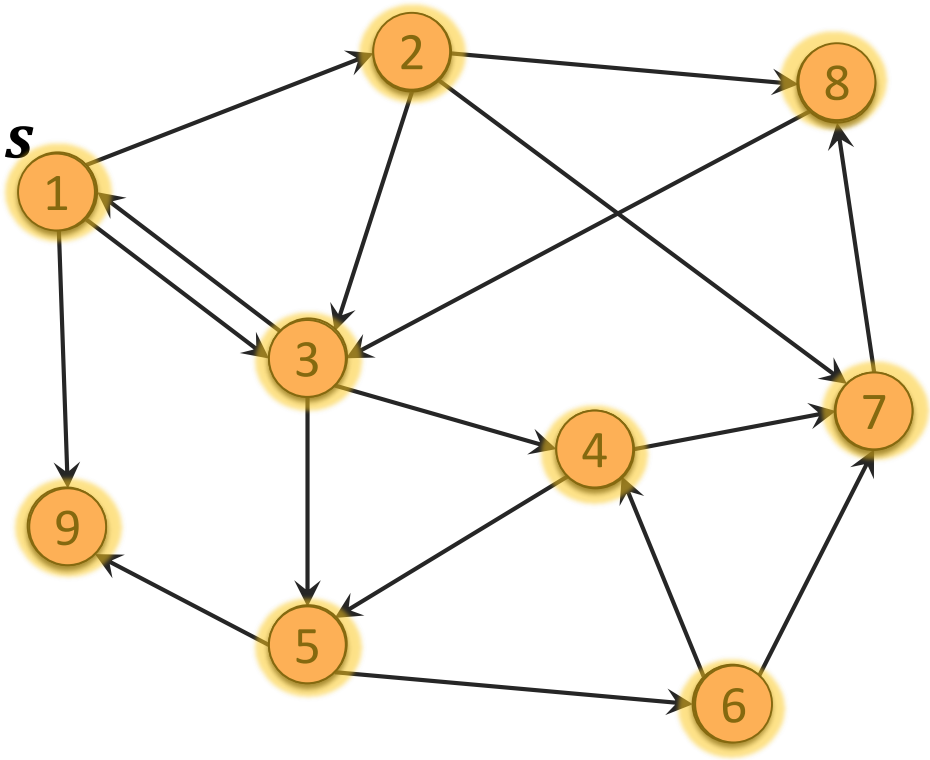
- **Zyklen: markiere** Knoten, welche man schon gesehen hat
- **Markiere** Knoten s, hänge s in die Queue
- Wie bisher, nehme immer den ersten Knoten u aus der Queue:
  - **besuche Knoten u**
  - Gehe durch die Nachbarn v von u
    Falls v nicht markiert, markiere v und hänge v in Queue
    Falls v markiert ist, muss nichts getan werden

Breitensuche (BFS Traversierung)

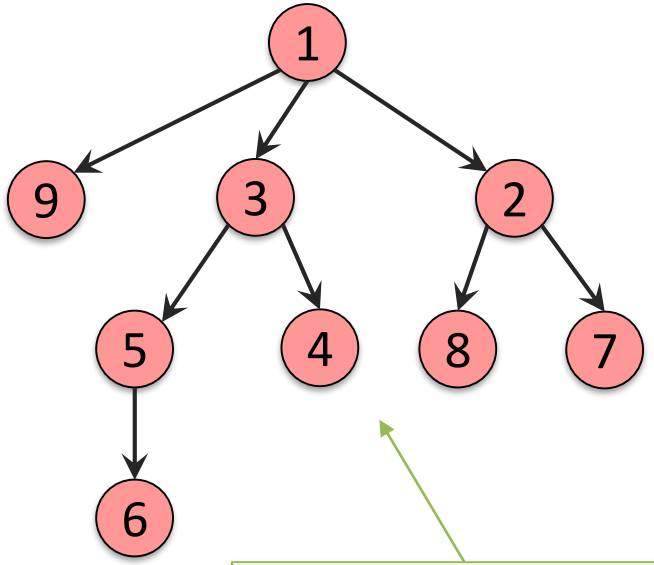
- Am Anfang ist $v.\mathrm{marked}$ bei allen Knoten v auf **false** gesetzt

```
BFS-Traversal(s):
    for all u in V: u.marked = false;
    Q = new Queue()
    s.marked = true
    Q.enqueue(s)
    while not Q.empty() do
        u = Q.dequeue()
        visit(u)
        for v in u.neighbors do
            if not v.marked then
                v.marked = true;
                Q.enqueue(v)
```

Breitensuche Beispiel

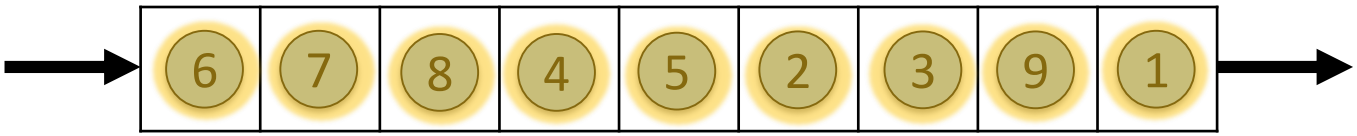


Besuchsreihenfolge:



BFS-Spannbaum

FIFO Queue:



Analyse Breitensuche

In der Folge benennen wir die Knoten folgendermaßen

- weiße Knoten: Knoten, welche der Alg. noch nicht gesehen hat
- graue (vorher: blaue) Knoten: markierte Knoten
  - Knoten werden grau, wenn sie in die Warteschlange eingefügt werden
  - Knoten sind grau, solange sie in der Warteschlange sind
- schwarze (rote) Knoten: besuchte Knoten
  - Knoten werden schwarz, wenn sie aus der Warteschlange genommen werden

Analyse Breitensuche

Die Laufzeit der BFS-Traversierung ist $O(n+m)$.

- **Annahme:** Graph durch Adjazenzlisten gegeben
  - Falls der Graph durch die Adjazenzmatrix gegeben ist, ist die Laufzeit $\Theta(n^2)$.
- weiße Knoten: Knoten, welche der Algorithmus noch nicht gesehen hat
- graue (vorher: blaue) Knoten: markierte Knoten
- schwarze (vorher: rote) Knoten: besuchte Knoten

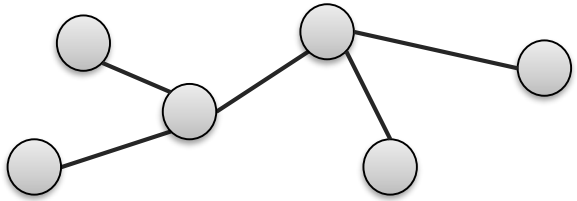
- Jeder Knoten kommt höchstens einmal in die Warteschlange.
  - Insgesamt gibt das $O(n)$ Warteschlangenoperationen.
- Wenn der Knoten v aus der Warteschlange entfernt wird, werden alle seine Nachbarn angeschaut.
  - Jede gerichtete Kante wird so genau ein Mal betrachtet .
  - Adjazenzlisten: Kosten pro Knoten $= O(\#\text{Nachbarn})$
    - Man muss einmal durch die Liste der Nachbarn gehen.
  - Adjazentmatrix: Kosten pro Knoten $= O(n)$
    - Man muss die ganze Zeile oder Spalte der Matrix durchgehen.

Bäume, Spannbäume

UNI FREIBURG

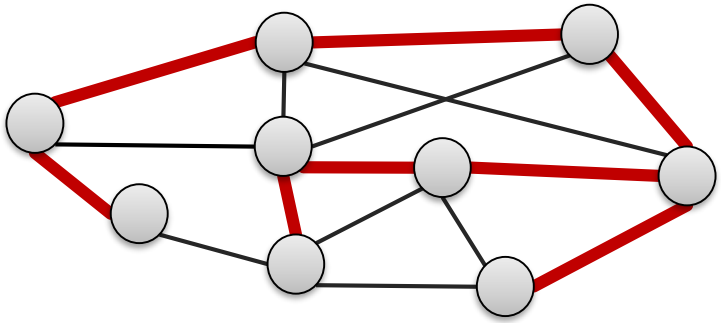
Baum:

- Ein zusammenhängender, ungerichteter Graph ohne Zyklen
  - bzw. auch ein gerichteter Graph, aber dann darf es auch ohne Berücksichtigung der Richtungen keine Zyklen haben



Spannbaum eines Graphen G:

- Ein Teilgraph T, so dass T ein Baum ist, welcher alle Knoten von G enthält
  - Teilgraph: Teilmenge der Knoten und Kanten, welche einen Graph ergeben

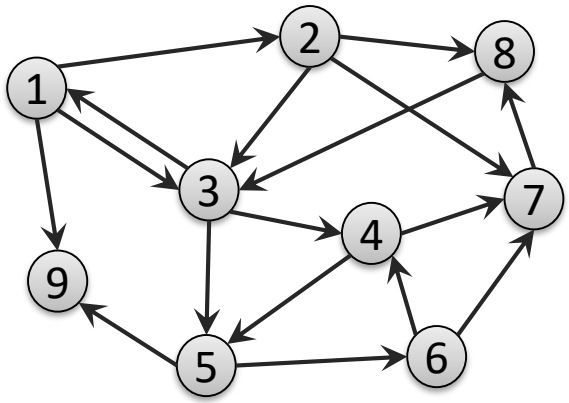


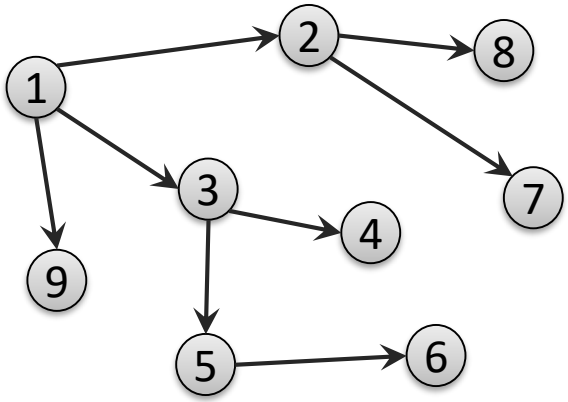
BFS Baum

Falls G gerichtet: alle Knoten von s aus erreichbar

Mit der BFS-Traversierung können wir folgendermaßen einen Spannbaum generieren (falls G zusammenhängend ist):

- Jeder Knoten u merkt sich, von welchem Knoten v aus er markiert wurde
- Der Knoten v ist dann der Parent-Knoten von u
  - Da jeder Knoten genau einmal markiert wird, ist der Parent von jedem Knoten eindeutig definiert, s ist die Wurzel und hat keinen Parent.

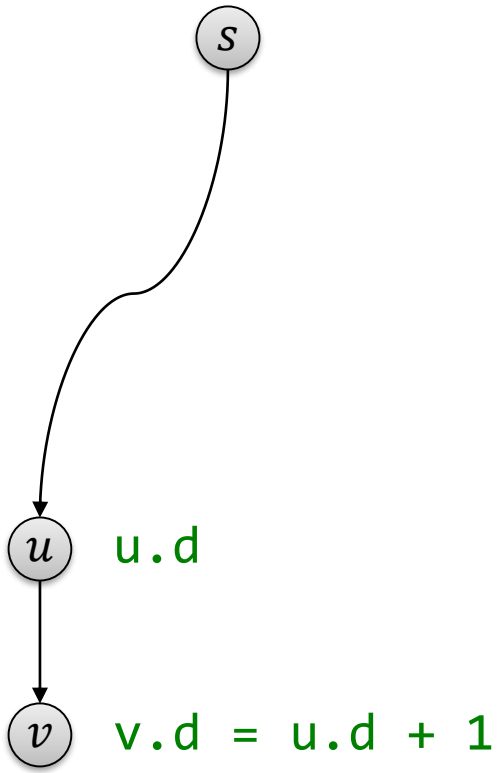




BFS Baum: Pseudocode

- Wir merken uns zusätzlich die Distanz von s im Baum

```
BFS-Tree(s):
    Q = new Queue();
    for all u in V: u.marked = false;
    s.marked = true;
    s.parent = NULL;
    s.d = 0
    Q.enqueue(s)
    while not Q.empty() do
        u = Q.dequeue()
        visit(u)
        for v in u.neighbors do
            if not v.marked then
                v.marked = true;
                v.parent = u;
                v.d = u.d + 1;
                Q.enqueue(v)
```



Analyse Breitensuche

Im BFS-Baum eines ungewichteten Graphen ist die Distanz von der Wurzel s zu jedem Knoten u gleich $d_G(s,u)$.

- Baumdistanz von der Wurzel: $d_T(s,u) = u.d$
- Wir müssen also zeigen, dass $u.d = d_G(s,u)$
- Es gilt sicher, dass $\boldsymbol{u.d \geq d_G(s,u)}$
  - Weil $u.d = d_T(s,u)$, ist das äquivalent zu $d_T(s,u) \geq d_G(s,u)$
  - Das gilt natürlich, weil ja der Pfad in T auch ein Pfad in G ist, die Distanz in T kann also sicher nicht kleiner sein als die Distanz in G.

Analyse Breitensuche

Lemma: Annahme: Während BFS-Traversal ist Zustand der Queue

$$Q = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle \ \ (v_1\text{: head}, v_r\text{: tail})$$

Dann gilt $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ (für $i = 1, \dots, r-1$)

Beweis: Per Induktion über die Warteschlangen-Operationen

- **Verankerung:** Am Anfang ist nur s mit $d.s = 0$ in der Queue.
- **Induktionsschritt:**
  - dequeue-Operation: $Q = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$, $v_r.d \leq v_1.d + 1 \leq v_2.d + 1$

    Induktionsvoraussetzung
  - enqueue-Operation: $\boldsymbol{u}$, $\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$, $\boldsymbol{v}$

    zuletzt entfernter Knoten

    Neuer Knoten in der Queue

    Wenn v in die Queue eingefügt wird, wird gerade der zuletzt entfernte Knoten u bearbeitet (v ist Nachbar von u).

    $\Longrightarrow v.d = u.d + 1$
  - **Aus Induktionsvoraussetzung:**

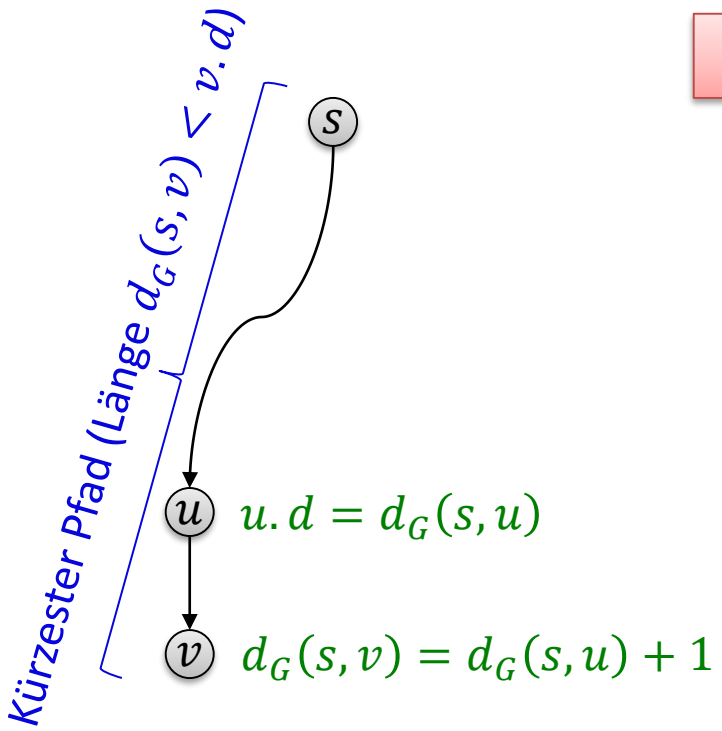
    $\boldsymbol{v.d \leq v_1.d + 1}$: $v.d = u.d + 1 \leq v_1.d + 1$

    $\boldsymbol{v_r.d \leq v.d}$: $v_r.d \leq u.d + 1 = v.d$

Analyse Breitensuche

Im BFS-Baum eines ungewichteten Graphen ist die Distanz von jedem Knoten u zur Wurzel s gleich $d_G(s,u)$.

- Widerspruchsbeweis:
  - Annahme: v ist Knoten mit kleinstem $d_G(s,v)$, für welchen $\boldsymbol{v.d > d_G(s,v)}$



$$\boldsymbol{v.d > d_G(s,v) = d_G(s,u) + 1 = u.d + 1}$$

Betrachte dequeue von u:

- v wird als ein Nachbar von u betrachtet
- v ist weiß $\Longrightarrow v.d = u.d + 1$
- v ist schwarz $\Longrightarrow v.d \leq u.d$
- v is grau $\Longrightarrow v$ ist in der Warteschlange
  Lemma: $v.d \leq u.d + 1$

Tiefensuche in allgemeinen Graphen

UNI FREIBURG

Grundidee Tiefensuche in G (Start bei Knoten $s \in V$)

- **Markiere Knoten v** (am Anfang ist $v = s$)
- Besuche die Nachbarn von v der Reihe nach *rekursiv*
- Nachdem alle Nachbarn besucht sind, **besuche v**

- **rekursiv:** Beim Besuchen der Nachbarn werden deren Nachbarn besucht, und dabei deren Nachbarn, etc.
- **Zyklen in G:** Besuche jeweils nur Knoten, welche noch nicht markiert sind

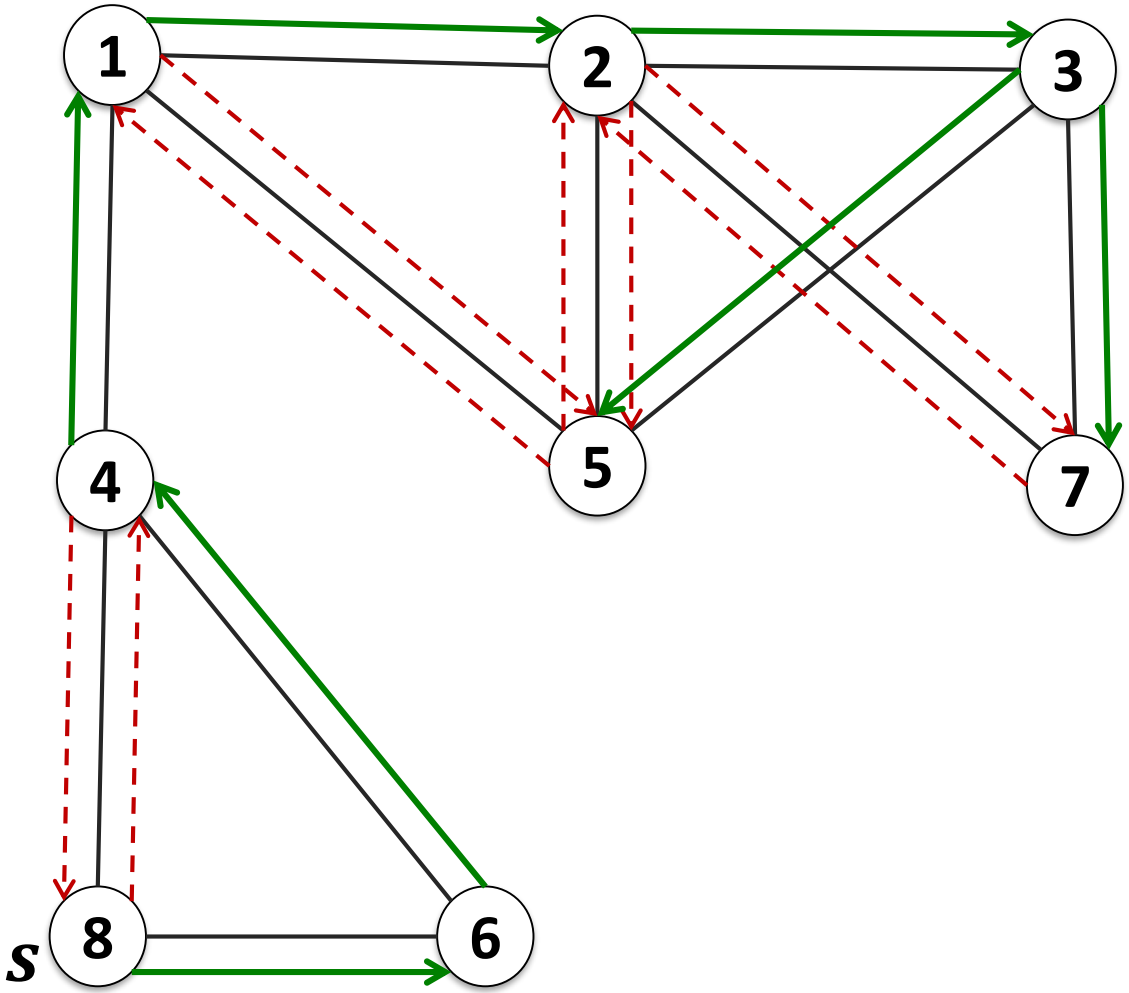
- entspricht der Postorder-Traversierung in Bäumen
- Fall man gleich beim Markieren den Knoten besucht, entspricht es der Preorder-Traversierung

Tiefensuche: Pseusocode

```
DFS-Traversal(s):
    for all u in V: u.color = white;
    DFS-visit(s, NULL)

DFS-visit(u, p):
    u.color = gray;
    u.parent = p;
    for all v in u.neighbors do
      if v.color = white
        DFS-visit(v, u)
    visit node u;
    u.color = black;
```

Tiefensuche: Beispiel



Tiefensuche: Analyse

In der gleichen Art wie bei der Breitensuche, kann man auch bei der Tiefensuche einen Spannbaum konstruieren

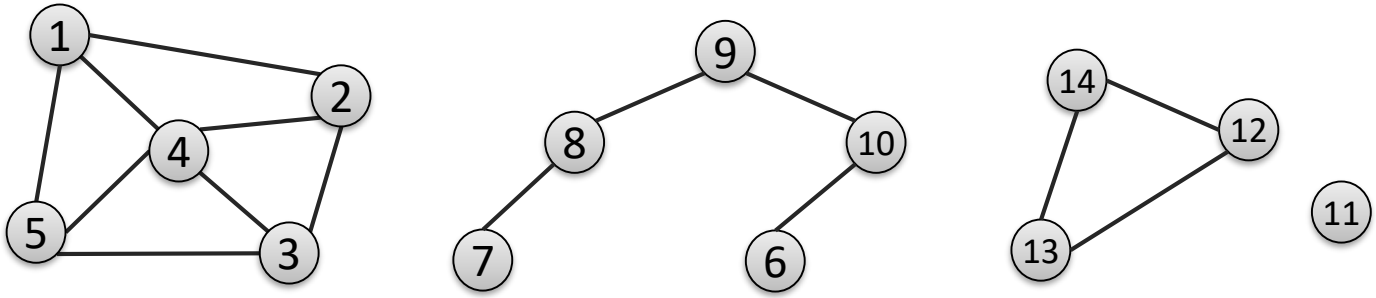
Die Laufzeit der Tiefensuche (DFS-Traversierung) ist $O(n+m)$.

- Wir färben die Knoten weiß, grau und schwarz wie vorher
  - nicht markiert = weiß, markiert = grau, besucht = Schwarz

- Wir führen die rekursive Funktion zur Traversierung für jeden Knoten höchstens einmal aus.
- Die Zeit, um Knoten v zu verarbeiten ist proportional zur Anzahl der (ausgehenden) Kanten von v

Zusammenhangskomponenten

- Die Zusammenhangskomponenten (oder einfach Komponenten) eines Graphen sind seine zusammenhängenden Teile.



Ziel: Finde alle Komponenten eines Graphen.

```
for u in V do
    if not u.marked then
        start new component
        explore with DFS/BFS starting at u
```

- Die Zusammenhangskomponenten eines Graphen können in $O(n+m)$ Zeit identifiziert werden. (mit Hilfe von DFS oder BFS)

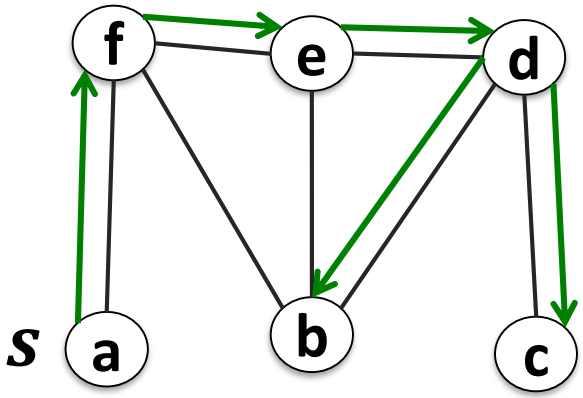
DFS- “Klammer”-Theorem

Wir definieren für jeden Knoten v die folgenden zwei Zeitpunkte

- $t_{v,1}$: Zeitpunkt, wenn v in der DFS-Suche grau gefärbt wird
- $t_{v,2}$: Zeitpunkt, wenn v in der DFS-Suche schwarz gefärbt wird

Theorem: Im DFS-Baum ist ein Knoten v genau dann im Teilbaum eines Knoten u, falls das Intervall $[t_{v,1}, t_{v,2}]$ vollständig im Intervall $[t_{u,1}, t_{u,2}]$ enthalten ist.

Beispiel:



$t_{a,1}\ t_{f,1}\ t_{e,1}\ t_{d,1}\ t_{c,1}\ t_{c,2}\ t_{b,1}\ t_{b,2}\ t_{d,2}\ t_{e,2}\ t_{f,2}\ t_{a,2}$

[[[[[ ] [ ]]]]]

DFS- “Klammer”-Theorem

Theorem: Im DFS-Baum ist ein Knoten v ist genau dann im Teilbaum eines Knoten u, falls das Intervall $[t_{v,1}, t_{v,2}]$ vollständig im Intervall $[t_{u,1}, t_{u,2}]$ enthalten ist.

Wieso ist dies nützlich?

- Erhöht das Verständnis für den resultierenden DFS-Baum
- Wir benötigen das Theorem z.B. bei der Korrektheit des Algorithmus’ zur topologischen Sortierung

DFS- “Klammer”-Theorem

Theorem: Im DFS-Baum ist ein Knoten v ist genau dann im Teilbaum eines Knoten u, falls das Intervall $[t_{v,1}, t_{v,2}]$ vollständig im Intervall $[t_{u,1}, t_{u,2}]$ enthalten ist.

Beweis:

- Graue Knoten bilden immer einen Pfad, der bei s startet.
  - Pfad beginnt bei s, aktueller Knoten am Ende des Pfads
  - Neuer Knoten w wird grau $\Longrightarrow$ w Nachbar von aktivem Knoten
  - Knoten wird schwarz $\Longrightarrow$ aktiver Knoten beendet Rekursion

- Knoten, v ist genau dann im Teilbaum von u wenn u Teil des Pfads ist, wenn v grau wird und damit gdw. $t_{u,1} < t_{v,1} < t_{u,2}$.
- Knoten v ist dann weiter rechts im grauen Pfad als u und muss dann auch vor u wieder Schwarz warden, also $t_{v,2} < t_{u,2}$

DFS- “Klammer”-Theorem

Theorem: Im DFS-Baum ist ein Knoten v ist genau dann im Teilbaum eines Knoten u, falls das Intervall $[t_{v,1}, t_{v,2}]$ vollständig im Intervall $[t_{u,1}, t_{u,2}]$ enthalten ist.

Implikationen

- Zwei Intervalle sind entweder disjunkt, oder das eine ist komplett im anderen enthalten.
- Wieso “Klammer”-Theorem:
  Wenn man bei jedem $t_{v,1}$ eine öffnende Klammer und bei jedem $t_{v,2}$ eine schließende Klammer hinschreibt, bekommt man ein Klammerausdruck, welcher korrekt geschachtelt ist.
- Ein weisser Knoten v, welcher in der rekursiven Suche von u entdeckt wird, wird schwarz, bevor die Rekursion zu u zurückkehrt.

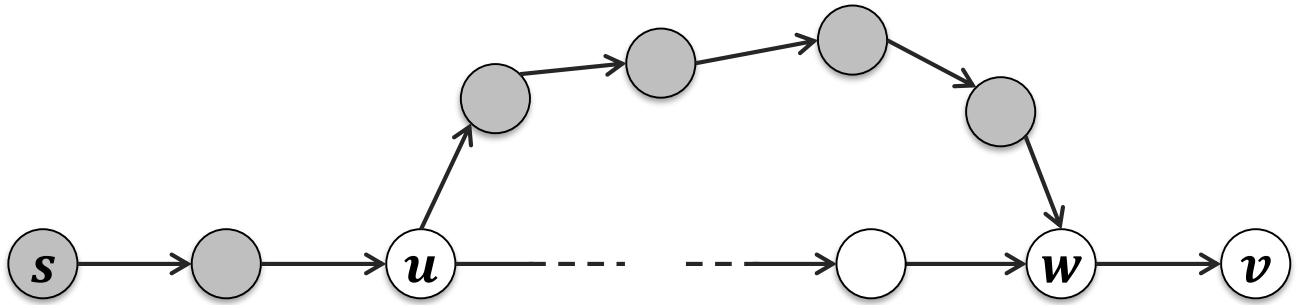
Weiße Pfade

Theorem: In einem DFS-Baum ist ein Knoten v genau dann im Teilbaum eines Knotens u, falls unmittelbar vor dem Markieren von u, ein komplett weißer Pfad von u nach v besteht.

zur Zeit $t_{u,1}$

Beweis:

- **Widerspruchsbeweis:** Nehme an, dass es einen Knoten v gibt, zu dem es einen weißen Pfad gibt, der aber nicht im Teilbaum ist
- Nehme an, dass v der Knoten mit dieser Eigenschaft ist, der unmittelbar vor dem Einfügen von u den kürzesten komplett weißen Pfad von u hat.



Klassifizierung der Kanten (bei DFS-Suche)

Baumkanten:

- (u, v) ist eine Baumkante, falls v von u aus entdeckt wird
  - Bei Betrachen von (u, v) ist v weiß

Rückwärtskanten:

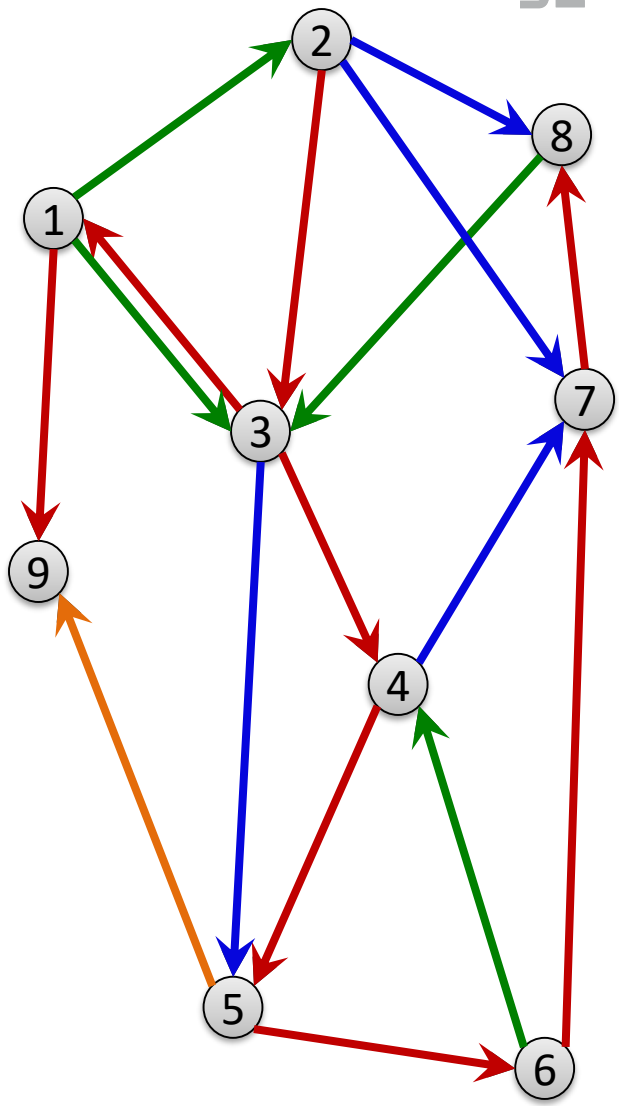
- (u, v) ist eine Rückwärtskante, falls v ein Vorgängerknoten von u ist
  - Bei Betrachten von (u, v) is v grau

Vorwärtskanten:

- (u, v) ist eine Vorwärtskante, falls v ein Nachfolgerknoten von u ist
  - Bei Betrachten von (u, v) ist v schwarz

Querkanten:

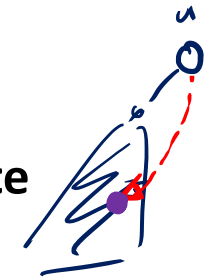
- Alle übrigen Kanten
  - Bei Betrachten von (u, v) ist v schwarz



Klassifizierung der Kanten (bei DFS-Suche)

Baumkante (u, v): 

- Knoten v wird als weisser Nachbar von u aus besucht
  - Falls bei Betrachten von (u, v) **v weiß** ist $\Longrightarrow$ **(u, v) Baumkante**



Rückwärtskante (u, v): 

- Teilbaum von u wird fertig besucht, bevor u schwarz wird
  - Falls bei Betrachten von (u, v) **v grau** ist $\Longrightarrow$ (u, v) **Rückwärtskante**

Vorwärtskante (u, v): 

$$t_{u,1} < t_{v,1} < t_{v,2} < t_{u,2}$$

- v ist in einem Teilbaum von u, der schon fertig besucht ist
  - Da v im Teilbaum von u ist, muss **v schwarz und $t_{v,1} > t_{u,1}$** sein

Querkante (u, v): 

$$t_{v,1} < t_{v,2} < t_{u,1} < t_{u,2}$$

- Solange u grau ist, sind alle neu besuchten Knoten im Teilbaum von u, v wird also vor u besucht: **v schwarz und $t_{v,1} < t_{u,1}$.**

DFS – Ungerichtete Graphen

UNI FREIBURG

- Bei ungerichteten Graphen wird jede Kante $\{u, v\}$ zwei Mal betrachtet (einmal von u und einmal von v)
- Wir klassifizieren die Kante gemäss der ersten Betrachtung

Theorem: Bei einer DFS-Suche in ungerichteten Graphen ist jede Kante entweder eine Baumkante oder eine Rückwärtskante.

Beweis:

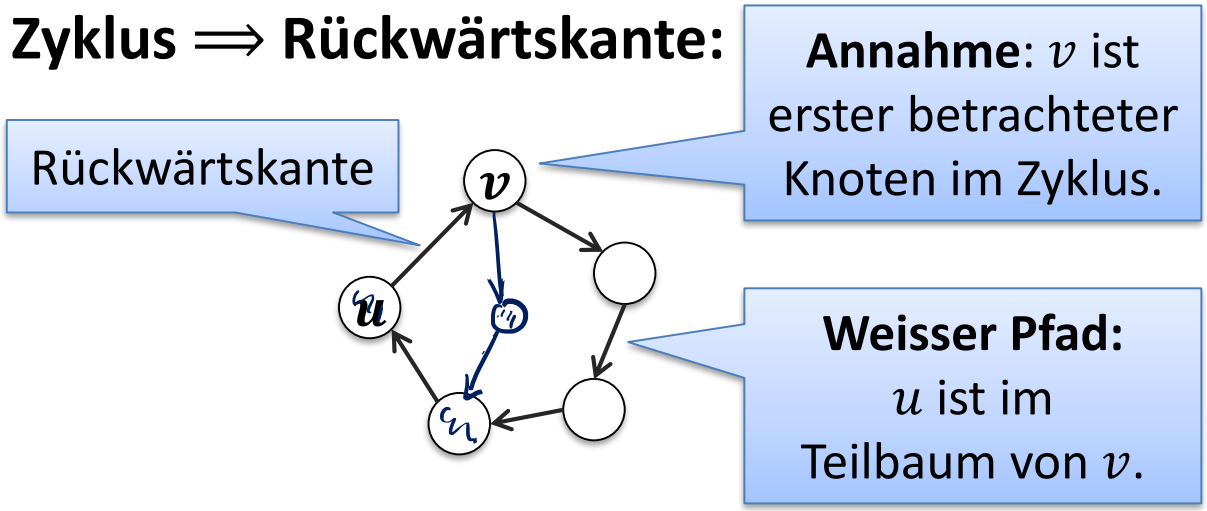
- Wir nehmen o.B.d.A. an, dass u vor v grau wird.
- Aus dem Theorem über weisse Pfade wissen wir, dass v besucht wird, solange u noch grau ist.
- Falls die Kante $\{u, v\}$ zuerst von u aus betrachtet wird, ist der Knoten v noch weiss $\Longrightarrow \{u, v\}$ ist eine Baumkante
- Falls die Kante $\{u, v\}$ zuerst von v aus betrachtet wird, ist der Knoten u noch grau $\Longrightarrow \{u, v\}$ ist eine Rückwärtskante

DFS – Gerichtete Graphen

Theorem: Ein gerichteter Graph hat genau dann keine Zyklen, falls es bei der DFS-Traversierung keine Rückwärtskanten gibt.

Rückwärtskante $\Longrightarrow$ Zyklus:

Zyklus $\Longrightarrow$ Rückwärtskante:



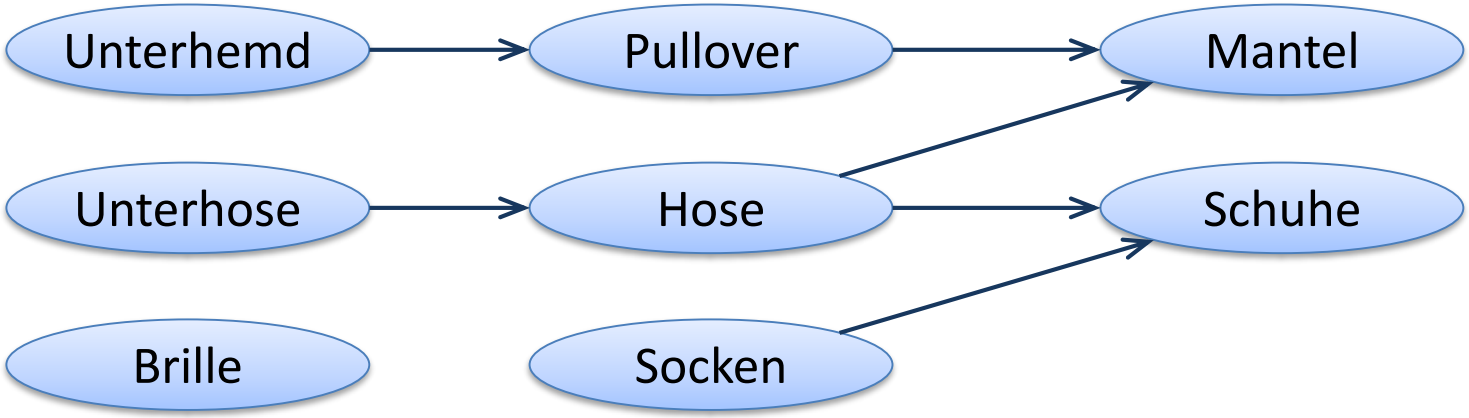
Konsequenz:

In gerichteten Graphen kann man in $O(n+m)$ testen, ob der Graph Zyklen-frei ist

Anwendung: Topologische Sortierung

Zyklenfreie, gerichtete Graphen:

- **DAG**: directed acyclic graph
- Modellieren z.B. zeitliche Abhängigkeiten von Aufgaben
- Beispiel: Anziehen von Kleidungsstücken



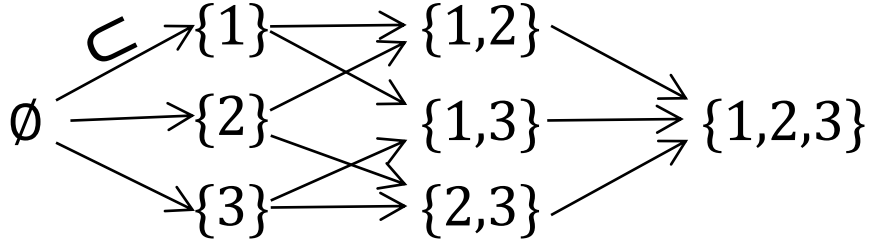
Topologische Sortierung:

- Sortiere die Knoten eines DAGs so, dass u vor v erscheint, falls ein gerichteter Pfad von u nach v existiert
- Im Beispiel: Finde eine mögliche Anziehreihenfolge

Topologische Sortierung: Etwas formaler…

Zyklenfreie, gerichtete Graphen:

- repräsentieren partielle Ordnungsrelationen
  - asymmetrisch: $a < b \implies \neg(b < a)$
    transitiv: $a < b \wedge b < c \implies a < c$
  - partielle Ordnung: nicht alle Paare müssen vergleichbar sein
- Beispiel: Teilmengenrelation bei Mengen



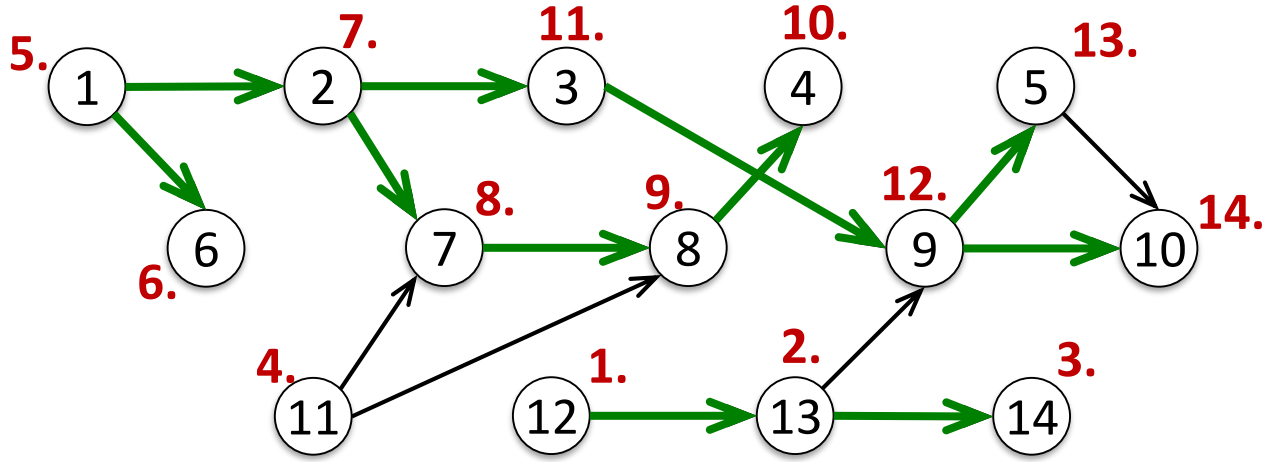
Topologische Sortierung:

- Sortiere die Knoten eines DAGs so, dass u vor v erscheint, falls ein gerichteter Pfad von u nach v existiert
- Erweitere eine partielle Ordnung zu einer totalen Ordnung

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$

Topologische Sortierung: Algorithmus

Führe DFS aus…



$t_{1,1}$ $t_{2,1}$ $t_{3,1}$ $t_{9,1}$ $t_{10,1}$ $t_{10,2}$ $t_{5,1}$ $t_{5,2}$ $t_{9,2}$ $t_{3,2}$ $t_{7,1}$ $t_{8,1}$ $t_{4,1}$ $t_{4,2}$ $t_{8,2}$

$t_{7,2}$ $t_{2,2}$ $t_{6,1}$ $t_{6,2}$ $t_{1,2}$ $t_{11,1}$ $t_{11,2}$ $t_{12,1}$ $t_{13,1}$ $t_{14,1}$ $t_{14,2}$ $t_{13,2}$ $t_{12,2}$

Beobachtung:

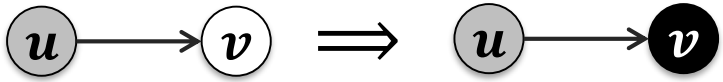
- Knoten ohne Nachfolger werden als erstes besucht (schwarz gef.)
- Besuchreihenfolge ist umgekehrte topologische Sortierung

Topologische Sortierung: Algorithmus

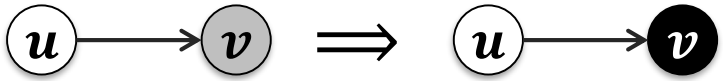
Theorem: Umgekehrte "Visit"-Reihenfolge (schwarz färben) der Knoten bei DFS-Traversierung ergibt topologische Sortierung eines gerichteten zyklenfreien Graphen.

Beweis:

- Wir müssen zeigen, dass für jede Kante (u, v), Knoten v vor Knoten u schwarz gefärbt wird.

- **Fall 1: u wird vor v grau:** 

  - Dann ist v im Teilbaum von u und es gilt deshalb $t_{u,1} < t_{v,1} < t_{u,2}$. Wegen dem Klammertheorem gilt dann auch $t_{v,2} < t_{u,2}$.

- **Fall 2: v wird vor u grau:** 

  - u kann nur grau werden, bevor v schwarz wird, wenn u im Teilbaum von v ist. Dann hätte es aber einen gerichteten Pfad von v nach $u \Longrightarrow$ Zyklus!

DFS-Traversierung: Weitere Anwendung

Stark zusammenhängende Komponenten

- Stark zus.-hängende Komponente eines gerichteten Graphen:
  "Maximale Knoten-Teilmenge, so dass jeder jeden erreichen kann"

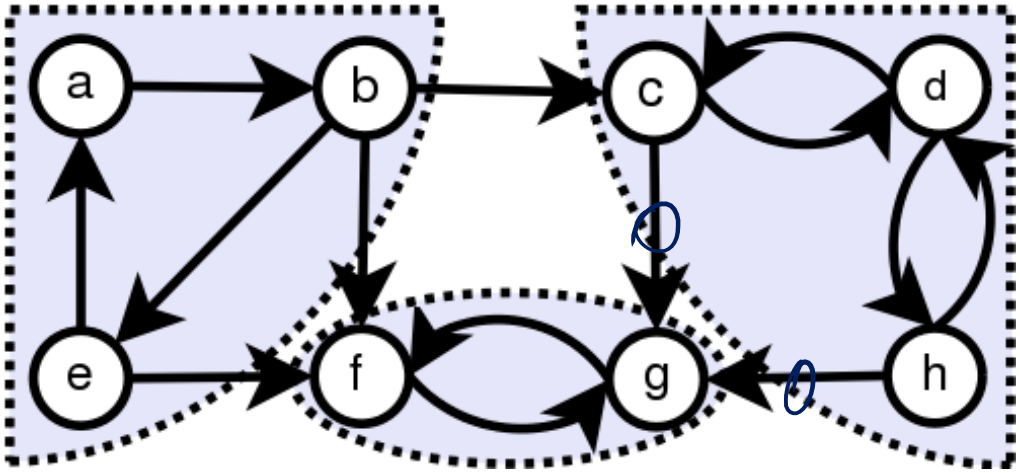
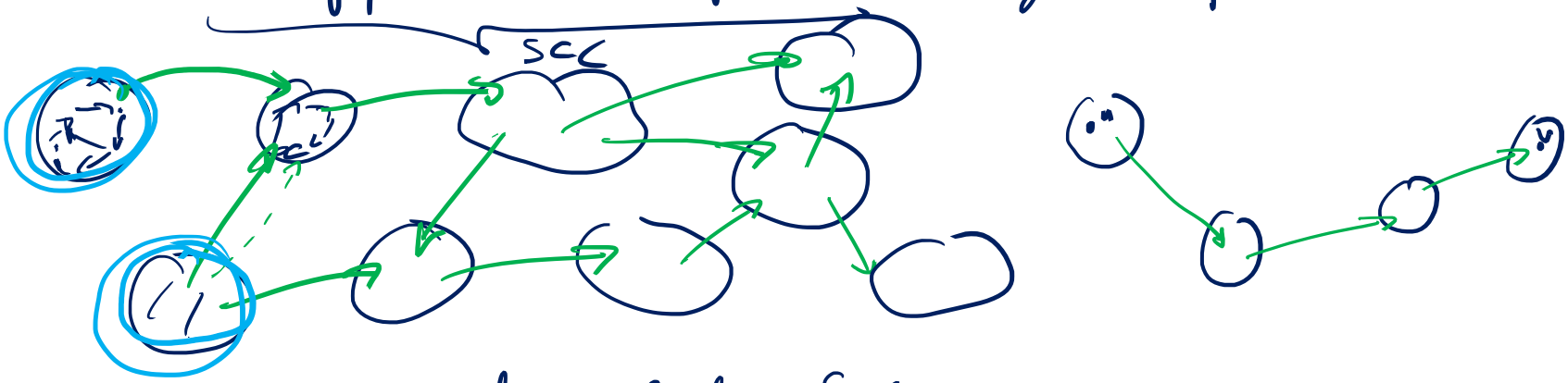


Bild: Wikipedia

- Benötigt 2 DFS-Traversierungen (Zeit $\in O(m+n)$)
  - auf G und auf G^T (alle Kanten umgedreht)
  - G und G^T haben die gleichen stark zus.-hängenden Komponenten
- Details z.B. in [CLRS]

Stark Zusammenhängende Komponenten

Ziel: Finde "strongly connected components" eines ger. Graphen



1. Schritt "top. Sortierung" auf DAG der SCC

DFS, schreibe umgekehrte Schwarzfärbe-Reihenfolge hin

Eigenschaft

$\Rightarrow$ u vor v in Reihenfolge

↳ 1. Knoten in Reihenfolge ist in SCC ohne eingehende Kanten

2. Schritt: DFS auf G^T, wähle Startknoten gem. Reihenfolge aus Schritt 1

→ jede rekursive Suche von einem "neuen" Knoten gibt eine SCC.