Algorithmen und Datenstrukturen 2022
Korrekturen – Vorlesung 2

1 O-Notation, monotone Funktionen

In den Vorlesungsunterlagen hat es mehrere Aussagen zu O-Notation und monotonen Funktionen. Es steht unter anderem, dass die Grenzwertdefinitionen oder Aussagen wie $f \in o(g)$ und $f \notin \Omega(g)$ für monotone Funktionen äquivalent sind (Folien 14, 15 und 17). Das stimmt so nicht. Alle Aussagen auf Seiten 14, 15 und 17 gelten aber unter anderem für alle monotonen Funktionen, welche sich "vernünftig" verhalten. Formal gelten die Aussagen immer dann, wenn die Grenzwerte auf Folie 15 definiert sind:

- Die Grenzwertdefinitionen auf Folie 15 gelten genau dann, wenn der Grenzwert $L := \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ definiert ist. In diesem Fall ist $f(n) \in O(g(n))$ genau dann, wenn $L < \infty$, $f(n) \in o(g(n))$ genau dann, wenn $L = 0$, und so weiter.
- Die Aussagen $f(n) \in o(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \notin \Omega(g(n))$ und $f(n) \in \omega(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \notin O(g(n))$ gelten auch falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ definiert ist.
- Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ definiert ist, dann sind auch die beiden Definitionen für die Ω-Notation auf Folie 17 äquivalent.

Um monotone Funktionen zu erhalten, für welche die Aussagen auf den Folien 14, 15 und 17 nicht gelten, muss man allerdings künstlich Funktionen konstruieren, welche im Zusammenhang mit der Komplexität von Algorithmen kaum von Bedeutung sind. Eine monotone Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, für welche $f(n) \notin o(n)$ und $f(n) \notin \Omega(n)$ gilt, kann man z.B. folgendermassen konstruieren.

Wir definieren zuerst eine Folge $n_1, n_2, \ldots$ wie folgt: $n_1 := 2$ und für alle $i > 1$ gilt $n_i := n_{i-1}^4$. Die Funktion f definieren wir nun folgendermassen.

- $f(1) := 1$
- Für alle n_i gilt $f(n_i) = n_i^2$
- Für alle anderen $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) = f(n_i)$ für das eindeutige n_i, so dass $n_i < n < n_{i+1}$

(Wenn man eine strikt monotone Funktion will, kann man z.B. $g(n) := f(n) + \sqrt{n}$ nehmen.)

An den Stellen $n = n_i$ verhält sich $f(n)$ wie eine quadratische Funktion und daher gilt $f(n) \notin o(n)$. An den Stellen $n = n_i - 1$ haben wir $f(n_i - 1) = f(n_{i-1}) = n_{i-1}^2 = \sqrt{n_i}$. An diesen Stellen verhält sich $f(n)$ deshalb wie eine Wurzelfunktion und daher gilt auch $f(n) \notin \Omega(n)$.