Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Sylva Scholz

Freiburg i. Br., den 13. Juni 2005

Approximations- und Online-Algorithmen SS 05

Übung 5

Abgabe am 27. Juni 2005 (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Euklidisches Travelling Salesman Problem (3 + 3 Punkte)

- Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende Graph genau dann einen Eulerkreis besitzt, wenn jeder Knotengrad gerade ist.
- Sei G ein Graph im $\mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik, dessen Knoten nicht alle auf einer Geraden liegen. Eine Rundreise heißt *selbstüberschneidungsfrei*, wenn sich jeweils zwei Kantensegmente der Rundeise nur in den Endknoten schneiden.
  Zeigen Sie, dass jede optimale Rundreise auf G selbstüberschneidungsfrei ist.

Aufgabe 2: Metrisches Travelling Salesman Problem (6 Punkte)
Betrachtet wird nun der in der Vorlesung eingeführte Algorithmus **MST** für das Travelling Salesman Problem mit einer *beliebigen* Metrik.
Zeigen Sie, dass **MST** keinen besseren Approximationsfaktor als 2 erzielen kann.
(Hinweis: Konstruieren Sie ein Beispiel ohne die Verwendung der euklidischen Metrik.)

Aufgabe 3: Hamiltonpfad Problem (6 Punkte)
Gegeben sei ein vollständiger Graph G im $\mathbb{R}^2$ und eine beliebige Metrik auf der Knotenmenge von G. Gesucht wird der kürzeste (nicht geschlossene) Pfad durch alle Knoten von G, in welchem jeder Knoten genau einmal besucht wird; der kürzeste *Hamiltonpfad*.
Konstruieren Sie einen $\frac{3}{2}$-approximativen Algorithmus für dieses Problem.
(Hinweis: Modifizieren Sie den in der Vorlesung vorgstellten Algorithmus von Christofides. Bestimmen Sie dabei ein minimales Matching, das 2 Knoten ungepaart lässt.)

Aufgabe 4: Kantenfärbung (6 Punkte)
In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Kantenfärbung *legal*, falls keine zwei an einem Knoten inzidenten Kanten dieselbe Farbe tragen. Gesucht ist nun die minimale Farbenanzahl einer legalen Kantenfärbung. Bezeichnet Δ den maximalen Knotengrad des Graphen, dann benötigt der optimale Algorithmus mindestens Δ und maximal $\Delta + 1$ Farben.
Zeigen Sie, dass der folgende Algorithmus $(2 - \frac{1}{\Delta})$-approximativ ist.

Greedy
Setze eine beliebige Reihenfolge $e_1, \ldots, e_m$ der Kanten fest, gemäß welcher Greedy färbt. Die Kante e_1 erhält die Farbe 1. Sind $e_1, \ldots, e_k$ gefärbt, dann weist Greedy der Kante e_{k+1} die *kleinste* natürliche Zahl $j > 1$ als Farbe zu, die noch nicht unter den bereits gefärbten Nachbarn von e_{k+1} vergeben wurde.