Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Sylva Scholz

Freiburg i. Br., den 27. Juni 2005

Approximations- und Online-Algorithmen SS 05

Übung 6

Abgabe am 11. Juli 2005 (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Vertex Cover (6 Punkte)
In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ wird eine minimale Teilmenge $V_C \subseteq V$ gesucht, so dass für alle Kanten $e = \{v, w\} \in E$ einer der beiden Endknoten v oder w in V_C liegt.
Untersuchen Sie den folgenden Algorithmus hinsichtlich seiner Approximationsgüte.

Algorithmus
`Eingabe:` Graph $G = (V, E)$

$V_C := \emptyset$ // $V_C \subseteq V$ soll am Ende des Algorithmus ein Vertex Cover sein.
$M := \emptyset$ // $M \subseteq E$ soll am Ende des Algorithmus ein Matching sein.
$E^{'} := E$ // $E^{'} \subseteq E$ enthält die Kanten aus E, die von V_C noch nicht überdeckt sind.
// Am Ende ist $E = \emptyset$.

`While` $E^{'} \neq \emptyset$ `do`

Wähle eine Kante $\{v, w\} \in E^{'}$.
$V_C := V_C \cup \{v, w\}$
$M := M \cup \{\{v, w\}\}$
$E^{'} := E \setminus \{$alle zu v und w inzidenten Kanten$\}$

`enddo`

`Ausgabe:` Vertex Cover V_C

Aufgabe 2: Clique (4 + 5 Punkte)
In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine maximale Teilmenge $C \subseteq V$ so zu bestimmen, dass je zwei Knoten $v, w \in C$ durch eine Kante $e = \{v, w\} \in E$ verbunden sind.

- Zeigen Sie unter der Vorraussetzung $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dass das Clique Problem $\mathcal{NP}$-vollständig ist.
(Hinweis: Es sei bekannt, dass Vertex Cover $\mathcal{NP}$-vollständig ist.)

- Entwickeln Sie ausgehend vom Nachweis der $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit des Clique Problems einen Approximationsalgorithmus. Was lässt sich über die Güte seiner Lösungen aussagen?

Aufgabe 3: Azyklischer Untergraph (3 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein *Zyklus* in G ist ein geschlossener Kantenzug, in dem jeder Knoten von sich selbst erreichbar ist. Ein Graph G wird *azyklisch* genannt, wenn er keine Zyklen besitzt.
Konstruieren Sie einen $\frac{1}{2}$-approximativen Algorithmus, der eine maximale Teilmenge $A \subseteq E$ findet, so dass der Untergraph $G_A = (V, A)$ azyklisch ist. Beweisen Sie hierbei, dass Ihr Untergraph tatsächlich azyklisch ist.
(Hinweis: Durch eine willkürliche Nummerierung der Knoten können die Kanten des Graphen in "vorwärts-" und "rückwärtslaufende" Kanten unterteilt werden. Die Wahl einer dieser Mengen kann für die Bestimmung der Teilmenge A verwendet werden.)

Aufgabe 4: Lineare Optimierung (6 Punkte)
Formulieren Sie das *Bin Packing* Problem, in welchem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, Objekte i mit Gewicht $w_i \in (0, 1]$ in eine minimale Anzahl von Kisten gepackt werden sollen, als ein lineares Programm.
(Hinweis: Es stehen maximal n Kisten zur Verfügung.)