Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Markus Schmidt
Sylva Scholz

Freiburg i. Br., den 14. Juni 2006

Approximations- und Online-Algorithmen SS 06

Übung 4

Abgabe am 28. Juni 2006 (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Der verlorene Schlüssel (6 Punkte)
Nach einer Party in der Mensa kommt ein Freiburger Student an seinem Wohnheim an und muss feststellen, dass er seinen Wohnheimschlüssel auf dem Rückweg von der Mensa verloren hat. Das Wohnheim befindet sich an einer Gabelung, von der aus zwei Straßen zur Mensa führen. Unglücklicherweise kann der Student sich nicht erinnern, welche Straße er für den Rückweg genommen hat. Systematisch sucht er beide Straßen gemäß folgender Strategie ab:

$d := 1$; aktuelle Richtung := links;
while Schlüssel ist nicht gefunden **do**
  Laufe d Meter in die aktuelle Richtung;
  if Schlüssel ist gefunden **then** Ende;
  else Gehe zurück zum Wohnheim;
  $d := 2\,d$;
  Ändere die aktuelle Richtung

Zeigen Sie, dass diese Strategie 9-kompetitiv ist.

Aufgabe 2: k-Server-Problem (6 Punkte)
Für das k-Server-Problem betrachten wir den Online-Algorithmus GREEDY: Sei r_i die aktuelle Anfrage. Sofern sich kein Server auf r_i befindet, benutze einen Server, der am dichtesten an der Anfrage r_i liegt, um r_i zu bedienen. Beweisen Sie, dass GREEDY nicht kompetitiv für das k-Server-Problem in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3: Geizige Algorithmen (6 Punkte)
Sei σ eine Anfragesequenz für das k-Server-Problem. Ein Algorithmus A_g wird *geizig* genannt, wenn er bei jeder Anfrage aus σ höchstens einen Server bewegt. Zeigen Sie, dass zu einem Online-Algorithmus A für das k-Server-Problem ein geiziger Online-Algorithmus A_g mit $\mathrm{A}_g(\sigma) \leq \mathrm{A}(\sigma)$ für jede Anfragesequenz σ existiert.

Aufgabe 4: Knotenüberdeckung durch Tiefensuche (6 Punkte)
In einem ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, wird eine Teilmenge $V_C \subseteq V$ möglichst kleiner Elementenanzahl gesucht, so dass für alle Kanten $e = \{v, w\} \in E$ mindestens einer der beiden Endknoten in V_C liegt.

Wir betrachten den Algorithmus TVC:

TVC

1. Bestimme mittels Tiefensuche einen Baum T in G.
2. Bestimme die Menge V_T der Knoten in T, die keine Blätter sind. Setze $V_C = V_T$. (Beachte: Eine Wurzel vom Grad 1 ist kein Blatt.)

Beweisen Sie, dass TVC 2-approximativ ist. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass T ein Matching der Größe $\geq \frac{1}{2}\ |V_C|$ besitzt.)