

Vorlesung Informatik 2

Algorithmen und Datenstrukturen

(15 - Amortisierte worst-case-Analyse
Beispiel: Bitwechselkosten eines Dualzählers)

Prof. Dr. Susanne Albers

Definition

Unter den **amortisierten worst-case Kosten** einer Folge o_1, \dots, o_n von Operationen, die auf einer gegebenen Struktur ausgeführt werden, versteht man die durchschnittlichen Kosten pro Operation für eine schlechtest mögliche Wahl der Folge o_1, \dots, o_n .

Genauer als simple, oft zu pessimistische worst-case-Analyse

Mögliche Vorgehensweisen bei der amortisierten worst-case-Analyse:

- Gesamtkosten der Operationsfolge berechnen und Durchschnitt bilden
(Aggregat Methode)
- **Bankkonto Paradigma:** Bezahle für die „billigen“ Operationen (freiwillig) etwas mehr und bezahle die teureren von den Ersparnissen
- **Potentialmethode**

Beispiel: Bitwechselkosten eines Dualzählers

Ein anfangs auf 00...0 initialisierter, k-stelliger Dualzähler wird schrittweise um jeweils 1 heraufgezählt.

Bitwechselkosten: 1 für jeden Wechsel $0 \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 0$.

Frage: Welche (durchschnittlichen) Bitwechselkosten pro Inkrementoperation entstehen, wenn **m Inkrementoperationen** ausgeführt werden?

Kosten

0 0 0 0 0

Worst-case-Analyse:

Aggregat Methode

Zählerstand #Bitwechsel

0 0 0 0 0

Jedes 2-te mal wechselt 1 Bit

Kosten

Bitwechselkosten für

m Operationen:

Bankkonto Paradigma

Bezahle 2 € für jede Inkrementoperation (mit wirklichen Kosten 1 €).

Zählerstand bezahlt

0 0 0 0 0

Potentialmethode

Sei $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, D Menge der Dualzählerzustände

Sei Φ_i das „Potential“ des Dualzählers nach der i -ten Inkrementoperation.

$t_i =$ **wirkliche** Kosten der i -ten Operation

Definiere die **amortisierten** Kosten a_i der i -ten Inkrementoperation durch:

$a_i =$

Potentialänderung bei Inkrement

i-te Inkrementoperation erzeugt aus Zählerstand D_{i-1} den Zählerstand D_i .