Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Alexander Souza

SS 2007
Übungsblatt 6

Randomisierte Algorithmen und probabilistische Methoden

Aufgabe 1 Momenterzeugende Funktionen

Die Momenterzeugende Fuktion $M_X(t)$ einer Zufallsvariable ist definiert durch

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

Aufgabe 2 Chernoff I

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \in \{0, 1\}$ und

$$\Pr[X_i = 1] = p_i.$$

Ferner sei $X = \sum_i X_i$ und $\mu = \mathbb{E}[X]$. Zeigen Sie, dass für alle $0 < \delta < 1$ gilt:

$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}\right)^{\mu}.$$

Aufgabe 3 Chernoff II

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \in \{0, 1, 2\}$ und

$$\Pr[X_i = 0] = \Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = 2] = \frac{1}{3}.$$

Ferner sei $X = \sum_i X_i$ und $\mu = \mathbb{E}[X]$. Zeigen Sie eine Chernoff-Schranke für

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu].$$