Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Alexander Souza

SS 2007
Übungsblatt 10

Randomisierte Algorithmen und probabilistische Methoden

Aufgabe 1 Anzahl Besuche

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Markov-Kette. Die Zufallsvariable $V_{i,t}$ nimmt den Wert eins an falls $X_t = i$; null sonst. Die Zufallsvariable $V_i = \sum_{t\geq 0} V_{i,t}$ zählt die Besuche bei Zustand i. Wir bezeichen mit $f_{i,i} = \Pr[T_{i,i} < \infty \mid X_0 = i]$ die Wahrscheinlichkeit nach endlich vielen Schritten nach i zurückzukehren. Zeigen Sie, dass

$$\Pr[V_i > r \mid X_0 = i] = (f_{i,i})^r.$$

Aufgabe 2 Teilbarkeit

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ die Summe von n unabhängigen Würfen einer fairen Münze mit Werten 0 und 1. Zeigen Sie, dass für jedes ganzzahlige $k \geq 2$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \text{ ist durch } k \text{ teilbar}] = \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 3 Anzahl Kanten des Zufallsgraph

Sei $G_{n,p}$ der Zufallsgraph mit n Knoten und Kantenwahrscheinlichkeit p. Zeigen Sie, dass für jedes konstante $0 < p < 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[G_{n,p} \text{ hat gerade Anzahl Kanten}] = \frac{1}{2}.$$