Dynamische Programmierung (1)

Prof. Dr. S. Albers

Prof. Dr. Th. Ottmann

Überblick

- Allgemeine Vorgehensweise, Unterschiede zur rekursiven Lösung
- Ein einfaches Beispiel: Die Berechnung der Fibonacci Zahlen

Technik der dynamischen Programmierung

Rekursiver Ansatz: Lösen eines Problems durch Lösen mehrerer kleinerer Teilprobleme, aus denen sich die Lösung für das Ausgangsproblem zusammensetzt.

Phänomen: Mehrfachberechnungen von Lösungen

Methode: Speichern einmal berechneter Lösungen in einer Tabelle für spätere Zugriffe.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, falls $n \geq 2$

Bem: Es gilt:

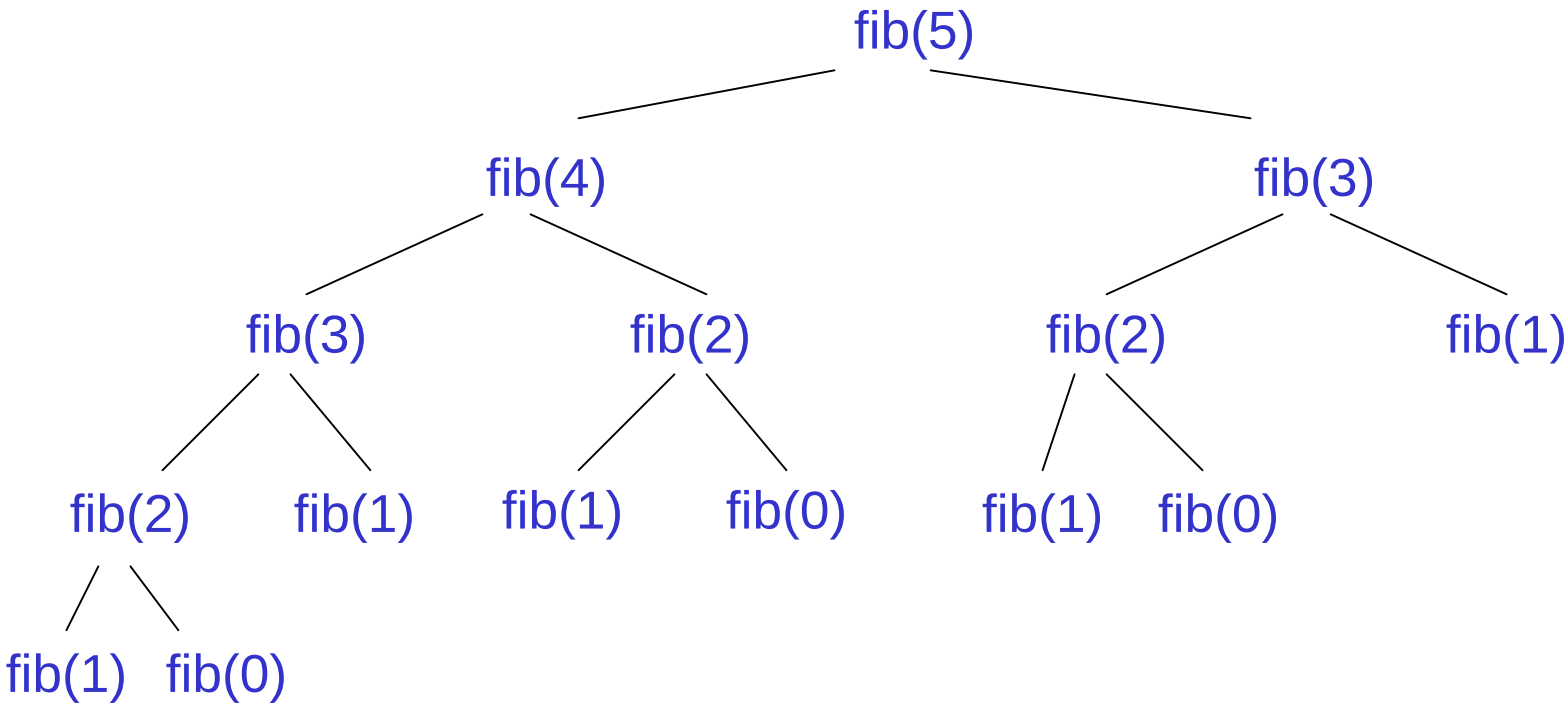
$$f(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} (1.618\ldots)^n \right]$$

Direkte Implementierung:

procedure *fib* (*n* : *integer*) : *integer*
if (*n* == 0) or (*n* ==1)
then return *n*
else return *fib*(*n* – 1) + *fib*(*n* – 2)

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

Aufrufbaum:



Mehrfachberechnung!

$$T(n) \approx \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n} - 1 \right] \approx \left[1.447 \times 1.618^{n} - 1\right]$$

Dynamisches Programmieren

Vorgehen:

1. Rekursive Beschreibung des Problems P

2. Bestimmung einer Menge T, die alle Teilprobleme von P enthält, auf die bei der Lösung von P – auch in tieferen Rekursionsstufen – zurückgegriffen wird.

2. Bestimmung einer Reihenfolge $T_0, ..., T_k$ der Probleme in T, so dass bei der Lösung von T_i nur auf Probleme T_j mit $j < i$ zurückgegriffen wird.

4. Sukzessive Berechnung und Speicherung von Lösungen für $T_0,...,T_k$.

Beispiel Fibonacci-Zahlen

1. Rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen nach gegebener Gleichung.

2. $T = \{ f(0),..., f(n\text{-}1)\}$

3. $T_i = f(i), \quad i = 0,...,n-1$

4. Berechnung von *fib*(*i*) benötigt von den früheren Problemen nur die zwei letzten Teillösungen *fib*(*i* – 1) und *fib*(*i* – 2) für i ≥ 2.

Beispiel Fibonacci-Zahlen

Berechnung mittels dynamischer Programmierung, Variante 1:

procedure *fib*(*n* : *integer*) : *integer*

1 $f_0 := 0; f_1 := 1$

2 **for** $k := 2$ **to** n **do**

3 $\quad\quad f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$

4 **return** f_n

Beispiel Fibonacci-Zahlen

Berechnung mittels dynamischer Programmierung, Variante 2:

procedure *fib* (*n* : *integer*) : *integer*

1 $f_{vorletzte} := 0; f_{letzte} := 1$

2 **for** $k := 2$ **to** n **do**

3 $f_{aktuell} := f_{letzte} + f_{vorletzte}$

4 $f_{vorletzte} := f_{letzte}$

5 $f_{letzte} := f_{aktuell}$

6 **return** $(n \leq 1)\ ?\ n : f_{aktuell}$

Lineare Laufzeit, konstanter Platzbedarf!

Memoisierte Version der Berechnung der Fibonacci-Zahlen

Berechne jeden Wert genau einmal, speichere ihn in einem Array $F[1...n]$:

```
procedure fib (n : integer) : integer
1   F[0] := 0;   F[1] := 1;
2   for i :=2 to n do
3         F[i] := ∞;
4   return lookupfib(n)
```

Die Prozedur *lookupfib* ist dabei wie folgt definiert:

```
procedure lookupfib(k : integer) : integer
1   if F[k] < ∞
2       then return F[k]
3       else F[k] := lookupfib(k – 1) + lookupfib(k – 2);
4                 return F[k]
```