Konstruktion von Suffix Bäumen

Prof. Dr. S. Albers

Prof. Dr. Th. Ottmann

Ukkonen‘s Algorithmus: Impliziter Suffix Baum

Definition: Ein *impliziter Suffix Baum* ist der Baum, den man aus dem Suffix Baum für *t*\$ enthält indem man :

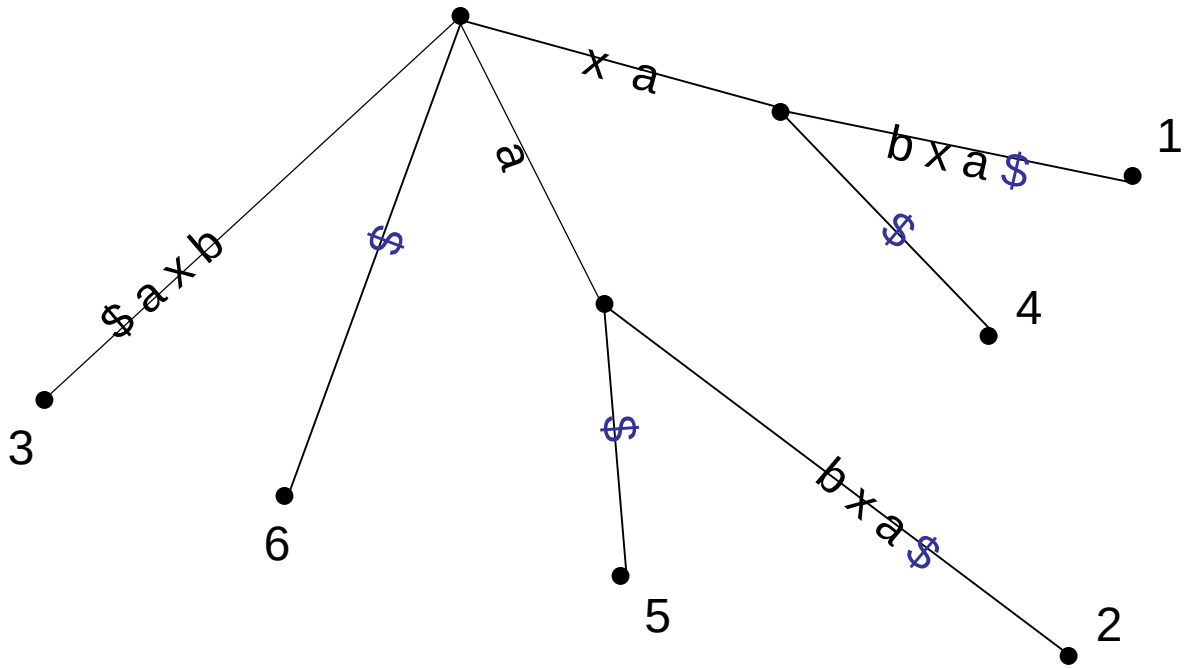
(1) \$ von den Markierungen der Kanten entfernt,

(2) Kanten ohne Markierung entfernt,

(3) Knoten mit nur einem Kind entfernt.

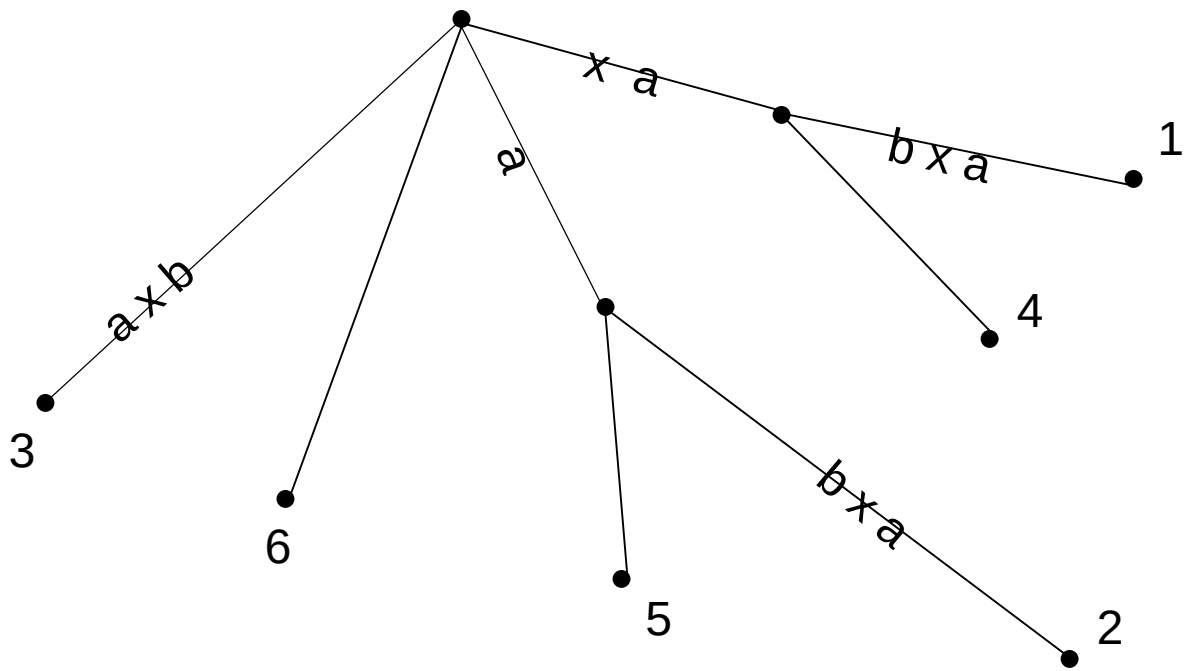
Ukkonen‘s Algorithmus: Impliziter Suffix Baum

t = x a b x a $
1 2 3 4 5 6



Ukkonen‘s Algorithmus: Impliziter Suffix Baum

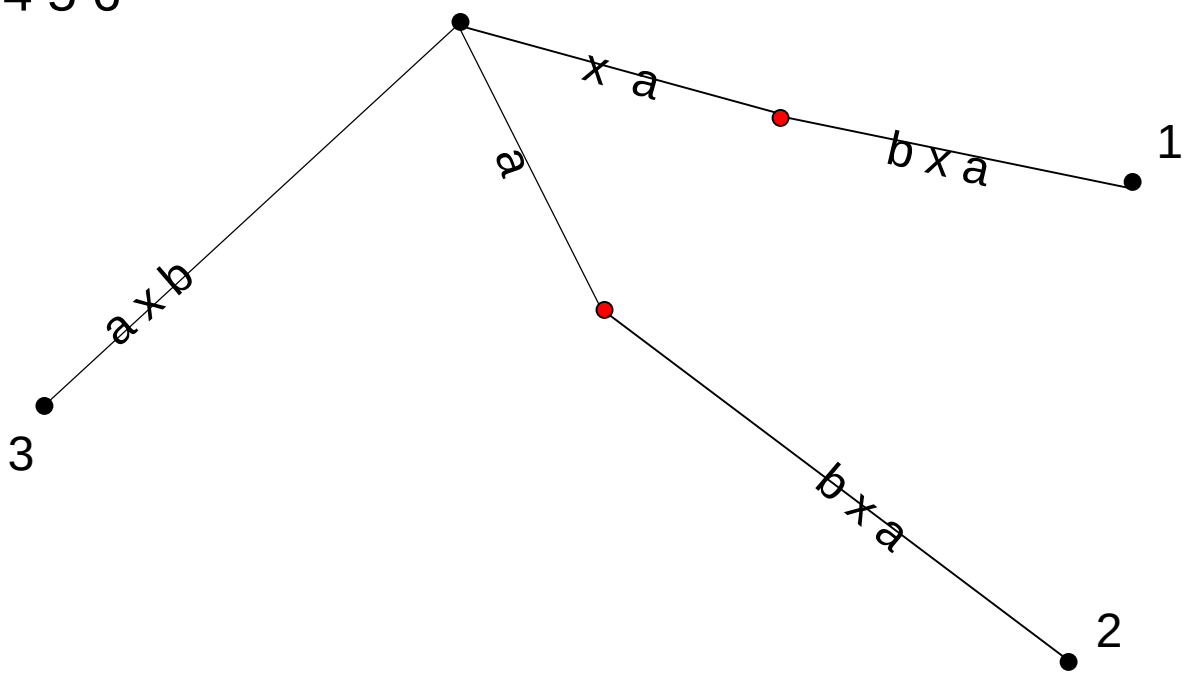
(1) Entfernen der Kantenmarkierung $ für *t* = x a b x a $



Ukkonen‘s Algorithmus: Impliziter Suffix Baum

(2) nicht markierten Kanten entfernen

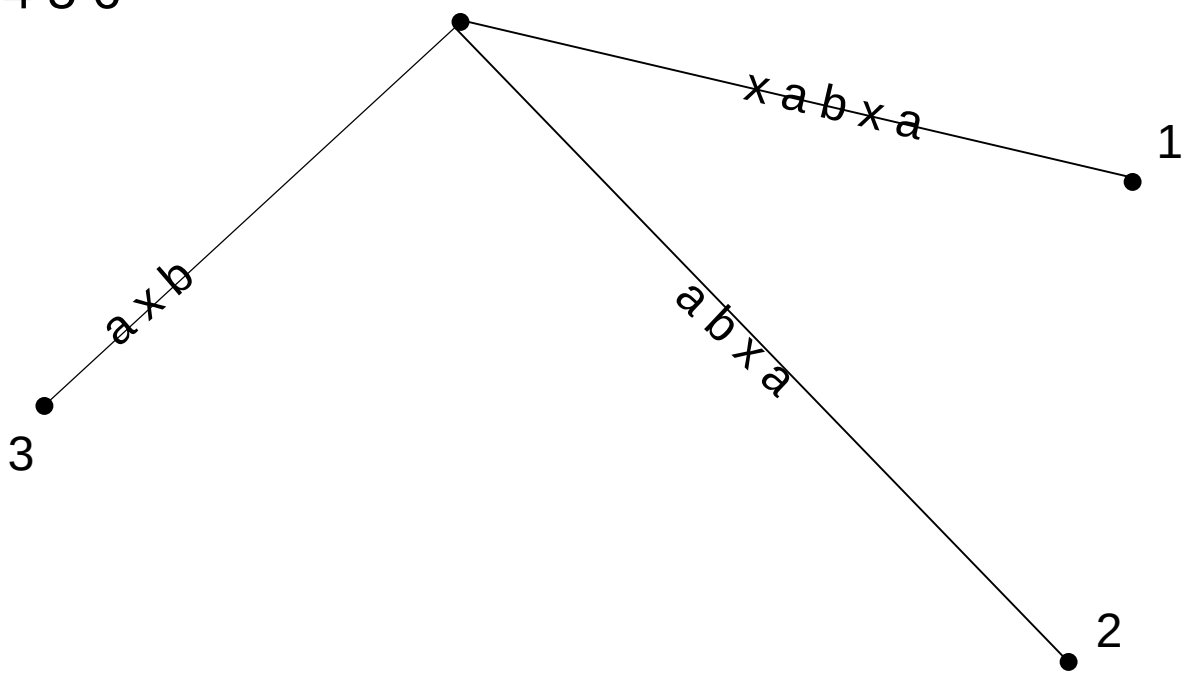
t = x a b x a $
1 2 3 4 5 6



Ukkonen‘s Algorithmus: Impliziter Suffix Baum

(3) Knoten mit nur einem Kind entfernen

t = x a b x a $
1 2 3 4 5 6



Ukkonen‘s Algorithmus

Sei $t = t_1 t_2 t_3 \ldots t_m$

Ukk arbeitet online: Der Suffix Baum $ST(t)$ wird schrittweise durch Konstruktion einer Reihe von impliziten Suffix Bäumen für alle Präfixe von t konstruiert:

$$ST(\varepsilon), ST(t_1), ST(t_1 t_2), \ldots, ST(t_1 t_2 \ldots t_m)$$

$ST(\varepsilon)$ ist der leere implizite Suffix Baum.

Er besteht nur aus der Wurzel

Ukkonen‘s Algorithmus

Die Methode wird *online* genannt, weil in jedem Schritt der implizite Suffix Baum für ein Anfangsstück von t konstruiert wird ohne den Rest des Inputstrings zu kennen.

Der Algorithmus arbeitet also inkrementell, da er den Input String zeichenweise von links nach rechts liest.

Ukkonen‘s Algorithmus

Inkrementelle Konstruktion des impliziten Suffixbaumes:

Induktionsanfang: $ST(\varepsilon)$ besteht nur aus der Wurzel.

Induktionsschritt: Aus $ST(t_1 \ldots t_i)$ wird $ST(t_1 \ldots t_i t_{i+1})$, für alle $i < m$

- Sei I_i der implizite Suffix Baum für $t[1...i]$
- Zuerst konstruiert man I_1 : Der Baum hat nur eine Kante, die mit dem Zeichen t_1 markiert ist.
- Die in Phase i+1 zu lösende Aufgabe ist, I_{i+1} aus I_i für i = 1 bis m – 1 zu konstruieren.

Ukkonen‘s Algorithmus

Pseudo-code Formulierung von ukk:

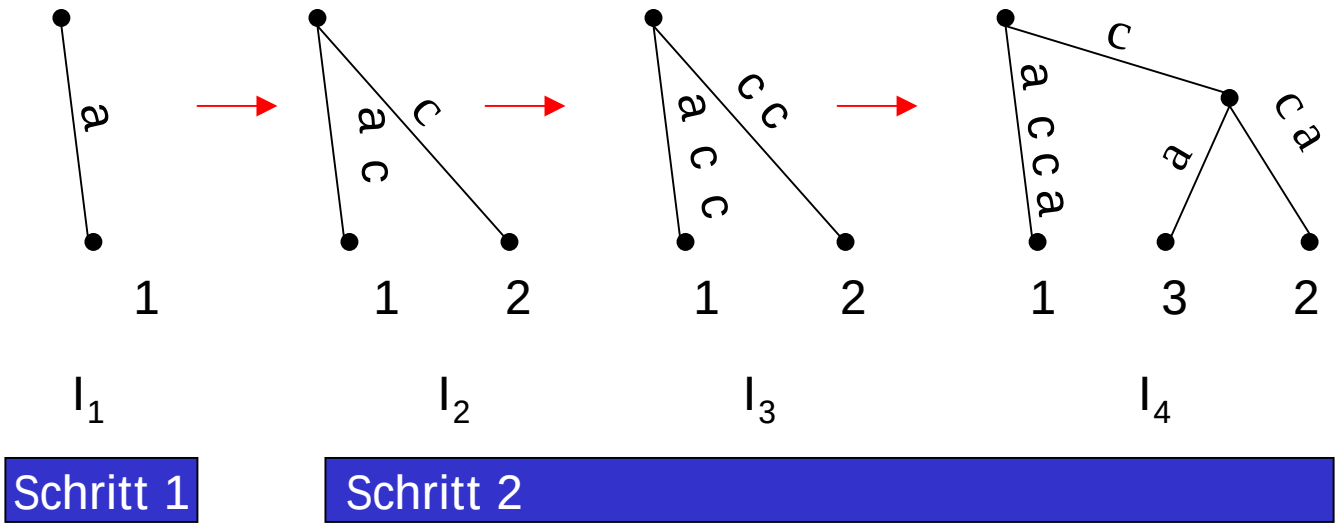
Konstruiere Baum I_1
for i = 1 **to** m – 1 **do**
begin {Phase i+1}
    for j = 1 **to** i +1 **do**
        begin {Erweiterung j}
        Finde das Ende des Pfades von der Wurzel,
        der mit t[j ... i] markiert ist, im aktuellen Baum.
        Falls erforderlich, erweitere ihn durch Hinzufügen
        des Zeichens t[i+1], damit gewährleistet ist, dass der
        String t[j...i+1] im Baum ist.
        end;
end;

Ziel: Verbesserung der Laufzeit von ukk

- Unterscheide zwischen impliziten und expliziten Erweiterungen
- In Phase i+1 werden alle impliziten Erweiterungen auf einmal in konstanter Zeit ausgeführt.
- Die Gesamtzahl aller (echten) expliziten Erweiterungen in allen m-1 Erweiterungs-Phasen kann durch O(m) beschränkt werden.
- Benutze Suffix-Links, um den Zeitaufwand pro expliziter Erweiterung (amortisiert) in konstanter Zeit auszuführen.
- Zeige, dass Suffix-Links während der expliziten Erweiterungen mit konstantem Zusatzaufwand eingefügt werden können, so dass jeder implizite Suffix Baum am Ende einer jeden Erweiterungsphase für alle inneren Knoten Suffix-Links hat.

Beispiel

t = a c c a $



Ukkonen‘s Algorithmus

- Jede Erweiterung j wird so durchgeführt, dass man das Ende des Pfades von der Wurzel, gekennzeichnet mit t[j...i], findet und den Pfad durch das Zeichen t[i+1] erweitert.

- In Phase i+1 wird zuerst der String t[1...i+1] in den Baum eingefügt, gefolgt von den Strings t[2...i+1] , t[3...i+1] ,....
  (entsprechend den Erweiterungen 1,2,3,.... In Phase i+1)

- Erweiterung i+1 in Phase i+1 fügt das einzelne Zeichen t[i+1] in den Baum ein (es sei denn es ist schon vorhanden)

Ukk: Suffix Erweiterungs-Regeln

Der Erweiterungs-Schritt j (in Phase i+1) wird nach einer der folgenden Regeln durchgeführt:

Regel 1: Wenn t[j...i] in einem Blatt endet, wird t[i+1] an die Markierung der zum Blatt führenden Kante angehängt.

Regel 2: Falls kein Pfad vom Ende von t[j...i] mit dem Zeichen t[i+1] anfängt, wird eine neue Kante zu einem neuen Blatt erzeugt, die mit dem Zeichen t[i+1] markiert wird. (Das ist die einzige Erweiterung, die die Anzahl der Blätter im Baum erhöht! Das Blatt repräsentiert bei Position j beginnende Suffixe.)

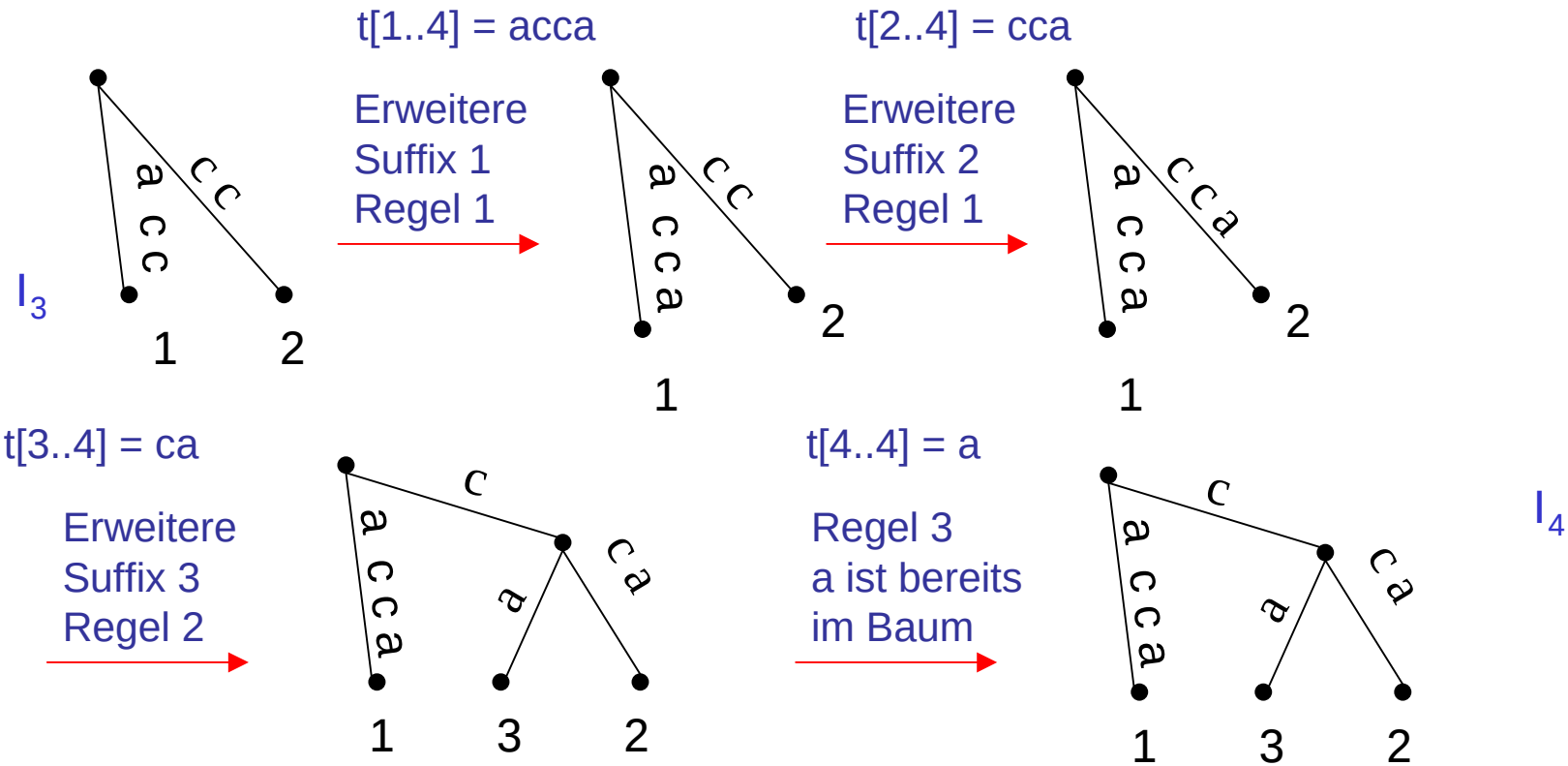
Regel 3: Falls ein mit dem Zeichen t[i+1] markierter Pfad am Ende von t[j..i] beginnt, tut man nichts. (Denn dann tritt t[j…i+1] tritt bereits im Baum auf.)

Beispiel

t = a c c a $

t[1...3] = acc

t[1...4] = acca



Beobachtung 1

Bei Durchführung von Phase i +1 (der Vorgang, durch den I_{i+1} aus I_i konstruiert wird) kann man beobachten:

(1) Sobald in Erweiterung j erstmals Regel 3 angewandt wurde, muss der Pfad, der mit t[j...i] im aktuellen Baum I_i markiert ist, eine Fortsetzung mit Zeichen t[i+1] haben. Dann muss auch für jedes $j' \geq j$ der Pfad , der mit t[j´... i] markiert ist, ebenfalls eine Fortsetzung mit Zeichen t[i+1] haben.

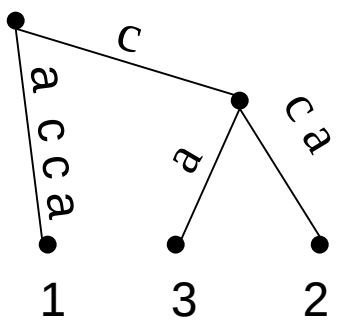
Daher wird Regel 3 auch für Erweiterung j´ für j´= j+1... i+1 angewandt.

Wenn man also einmal Regel 3 für eine Erweiterung j in Phase i +1 angewandt hat kann man diese Phase beenden.

Beobachtung 2

(2) Sobald man ein in l_i ein Blatt erzeugt, bleibt dies ein Blatt in allen Bäumen $l_{i'}$ für i´> i. (Einmal ein Blatt, immer ein Blatt!)
Denn, es gibt keine Regel für das Entfernen von Blättern

t = a c c a b a a c b a ....



l_4

Vermeiden unnötiger Schritte

Folgerung:

- Blatt 1 wird in Phase 1 erstellt, daher gibt es in jeder Phase i + 1 eine Anfangssequenz von aufeinanderfolgenden Erweiterungen (angefangen bei Erweiterung 1) bei der Regel 1 oder Regel 2 angewandt wird.

- Sei j_i die letzte Erweiterung in Phase i, die nach Regel 1 oder 2 erfolgt;

  d.h. jede Erweiterung j´, mit $j' > j_i$, erfolgt nach Regel 3.

  Da jede Anwendung von Regel 2 ein neues Blatt erstellt, gilt nach Beobachtung 2: $j_i \leq j_{i+1}$

Nicht alle Erweiterungen müssen explizit durchgeführt werden!

Explizite Erweiterungen

Reihenfolge der expliziten Erweiterungen:

Phase 1:	berechne Erweiterungen	$j_1 = 1$
Phase 2:	berechne Erweiterungen	$j_1 + 1 \ldots j_2$
Phase 3:	berechne Erweiterungen	$j_2 + 1 \ldots j_3$
....		
Phase i-1:	berechne Erweiterungen	$j_{i-2} + 1 \ldots j_{i-1}$
Phase i:	berechne Erweiterungen	$j_{i-1} + 1 \ldots j_i$

In jeden zwei aufeinanderfolgenden Phasen gibt es höchstens einen Index, der in beiden Phasen betrachtet werden muss, um die erforderlichen Erweiterungen durchzuführen.

Implizite Erweiterungen

Der Algorithmus kann nun verbessert werden:

Die in Phase i+1 auszuführenden Erweiterungen j für $j \in [1, j_i]$
basieren alle auf Regel 1 und es wird nur konstante Zeit
benötigt, um all diese Erweiterungen implizit durchzuführen.
(Benutze globale Variable zur Markierung der aktuellen Textlänge!)

Falls $j \in [j_i + 1, i+1]$ ist, sucht man das Ende des mit t[j...i] markierten Pfades und erweitert ihn mit dem Zeichen t[i+1] indem man Regel 2 oder 3 anwendet.
Falls dabei Regel 3 angewandt wird setzt man nur $j_{i+1} = j - 1$
und beendet Phase i+1.

Beispiel für implizite und exlpizite Erweiterungen

Beispiel: Konstruktion des impliziten Suffix Baumes für

t = pucupcupu

Struktur der Erweiterungs-Phasen

t = pucupcupu

i: 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ε	***p**	pu	puc	pucu	pucup	pucupc	pucupcu	pucupcup	pucupcupu
		***u**	uc	ucu	ucup	ucupc	ucupcu	ucupcup	ucupcupu
			***c**	cu	cup	cupc	cupcu	cupcup	cupcupu
				u	***up**	upc	upcu	upcup	upcupu
					p	***pc**	pcu	pcup	pcupu
						c	**cu**	**cup**	***cupu**
							u	up	***upu**
								p	**pu**
									u

- Suffixe, die zu einer Erweiterung nach Regel 2 führen, sind mit * markiert
- Unterstrichene Suffixe markieren die letzte Erweiterung nach Regel 2
- Suffixe, die eine Phase beenden (erstmalige Anwendung von Regel 3) sind blau markiert.

Beobachtungen

- Solange der Algorithmus explizite Erweiterungen ausführt, merkt man sich im Index j* den Index der gerade aktuell ausgeführten expliziten Erweiterung.
- Im Verlaufe der Ausführung des Algorithmus nimmt j* niemals ab, sondern kann zwischen zwei aufeinanderfolgenden Phasen höchstens gleich bleiben.
- Da es nur m Phasen gibt (m = |t|), und j* durch m begrenzt ist, führt der Algorithmus daher nur 2m explizite Erweiterungen aus.

Ukkonen‘s Algorithmus: Verbesserung

Revidierte Pseudocode Formulierung von uuk:

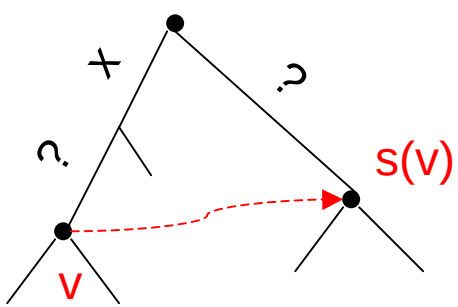
Konstruiere Baum I_1; j* = 1;
for i = 1 **to** m – 1 **do**
begin {Phase i+1}
  for j = j* +1 **to** i +1 **do**
    begin {Erweiterung j}
      Finde das Ende des Pfades von der Wurzel
      mit Markierung t[j ... i] im aktuellen Baum.
      Falls erforderlich, erweitere ihn durch Hinzufügung des Zeichens t[i+1],
      damit gewährleistet wird, dass der String t[j...i+1] im Baum ist.
      j* = j;
      if Regel 3 wurde angewandt im Erweiterungsschritt j
      then j* = j – 1 und beende Phase i+1;
      end;
end;

Nutzung von Suffix-Links

Nutze Suffix-Links zur Beschleunigung des Schritts:

Finde das Ende des Pfades von der Wurzel
mit Markierung t[j ... i] im aktuellen Baum I_i

Starte bei Knoten v, der t[j-1 … i] = x? in I_i entspricht.

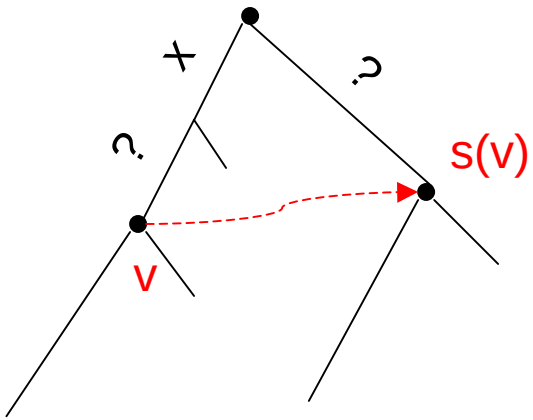


Falls t[j-1 ... i] in einem inneren Knoten v endet, folge Suffix-Link zu s(v)!

Nutzung von Suffix-Links

Sonst: Beginne beim kontrahierten Ort v von t[j-1 … i], folge Suffix-Link und bestimme von dort aus t[j … i],

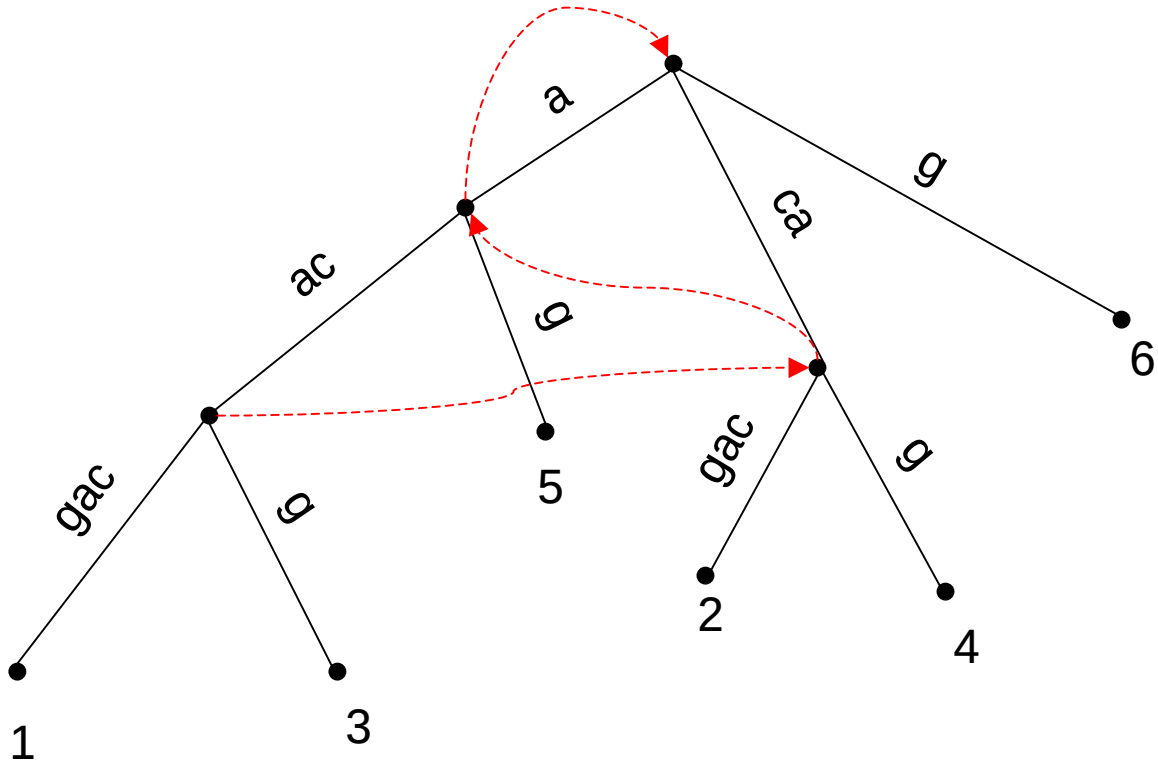
Falls neue innere Knoten erzeugt wurden, setzte Suffix-Links



Beispiel

Beispiel: Konstruktion des impliziten Suffixbaums für acacag….

Beispiel: Nutzung von Suffix-Links



acacgacacc....

Aufwandsabschätzung

- Mit der Hilfe von Suffix Links werden die Erweiterungen basierend auf Regel 2 oder Regel 3 vereinfacht.

- Jede explizite Erweiterung kann in amortierister Zeit O(1) ausgeführt werden (Begründung: Folgt man Suffix-Links, so kann man insgesamt höchstens so oft im Baum hinaufsteigen, wie man hinabsteigen kann; das sind aber nur O(m) Niveaus!)

- Weil nur 2m explizite Erweiterungen durchgeführt werden, beträgt die Gesamtlaufzeit von Ukkonen´s Algorithmus O(m) (m = |t|).

Echter Suffix Baum

Der echte Suffix-Baum:

Der endgültige implizite Suffix Baum I_m kann in einen wirklichen Suffix Baum in Zeit O(m) umgewandelt werden:

(1) Füge ein Terminalsymbol $ ans Ende vom String t ein

(2) Lasse Ukkonen´s Algorithmus mit diesem Zeichen weiterlaufen

Das Resultat ist der echte Suffix Baum in dem kein Suffix ein Prefix eines anderen Suffix ist und jedes Suffix in einem Blatt endet.