Algorithmentheorie

14 – Dynamische Programmierung (3)

Konstruktion optimaler Suchbäume

Prof. Dr. S. Albers

Technik der dynamischen Programmierung

Rekursiver Ansatz: Lösen eines Problems durch Lösen mehrerer kleinerer Teilprobleme, aus denen sich die Lösung für das Ausgangsproblem zusammensetzt.

Phänomen: Mehrfachberechnungen von Lösungen

Methode: Speichern einmal berechneter Lösungen in einer Tabelle für spätere Zugriffe.

Das Optimalitätsprinzip

Typische Anwendung für dynamisches Programmieren:

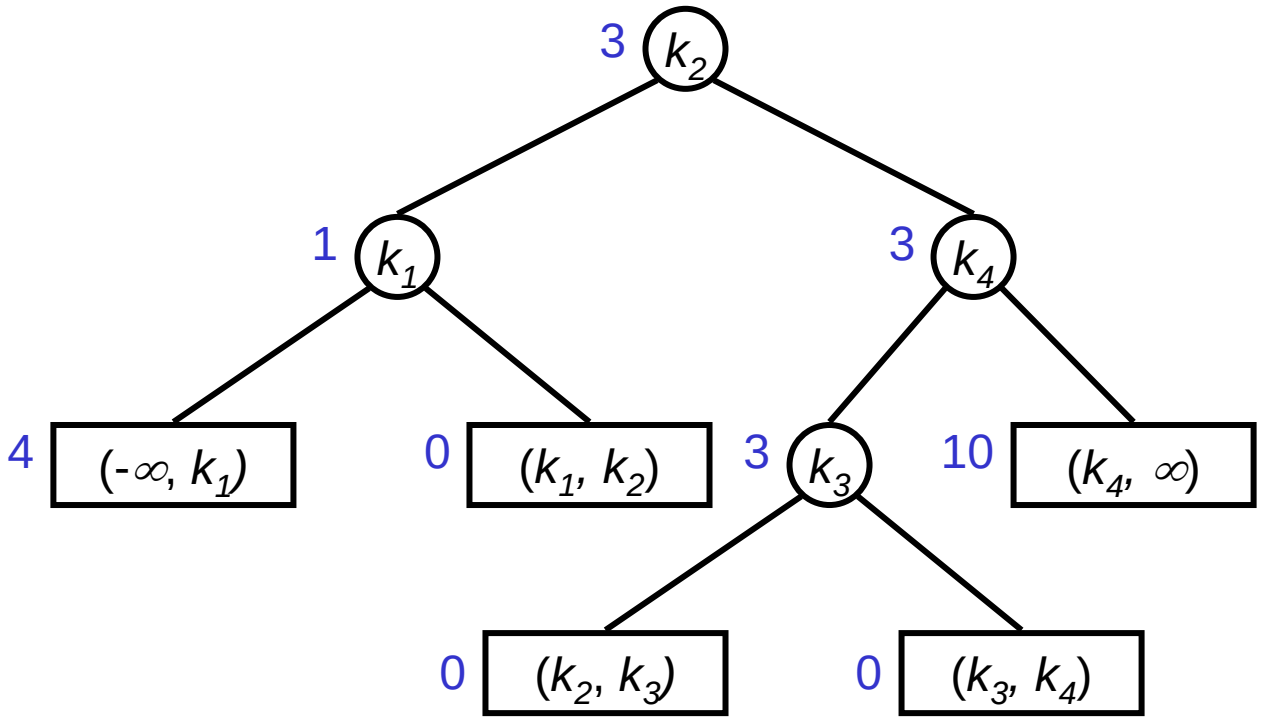
Optimierungsprobleme

Eine optimale Lösung für das Ausgangsproblem setzt sich aus *optimalen* Lösungen für kleinere Probleme zusammen.

Konstruktion optimaler Suchbäume

$(-\infty,k_1)$ k_1 (k_1,k_2) k_2 (k_2,k_3) k_3 (k_3,k_4) k_4 (k_4, ∞)

4 1 0 3 0 3 0 3 10



Gewichtete Pfadlänge:

$3 \cdot 1 + 2 \cdot (1 + 3) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (4 + 10)$

Konstruktion optimaler Suchbäume

Gegeben: Schlüsselmenge *S*

$S = \{k_1,....k_n\} \quad -\infty = k_0 < k_1 < ... < k_n < k_{n+1} = \infty$

a_i: (absolute) Häufigkeit, mit der nach k_i gesucht wird

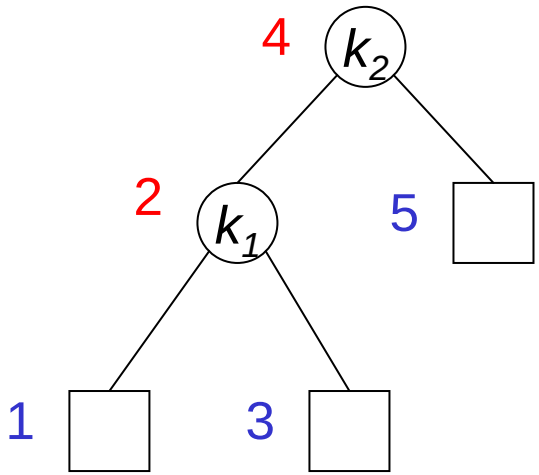
b_j: (absolute) Häufigkeit , mit der nach $x \in (k_j, k_{j+1})$ gesucht wird

Gewichtete Pfadlänge *P*(T) eines Suchbaumes T für S:

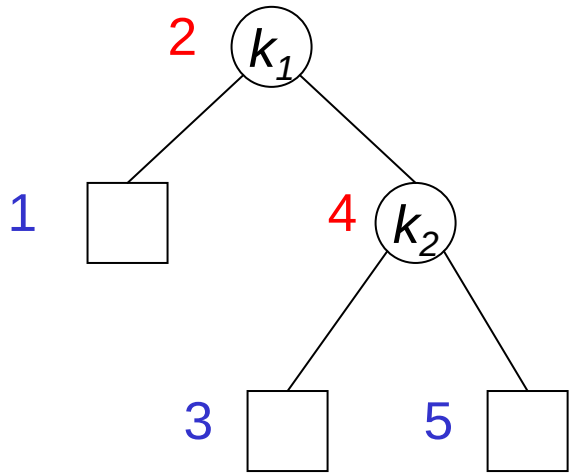
$$P(T) = \sum_{i=1}^{n} (Tiefe(k_i) + 1)a_i + \sum_{j=0}^{n} Tiefe((k_j, k_{j+1}))b_j$$

Gesucht: Ein Suchbaum für *S* mit minimaler Pfadlänge *P*

Konstruktion optimaler Suchbäume

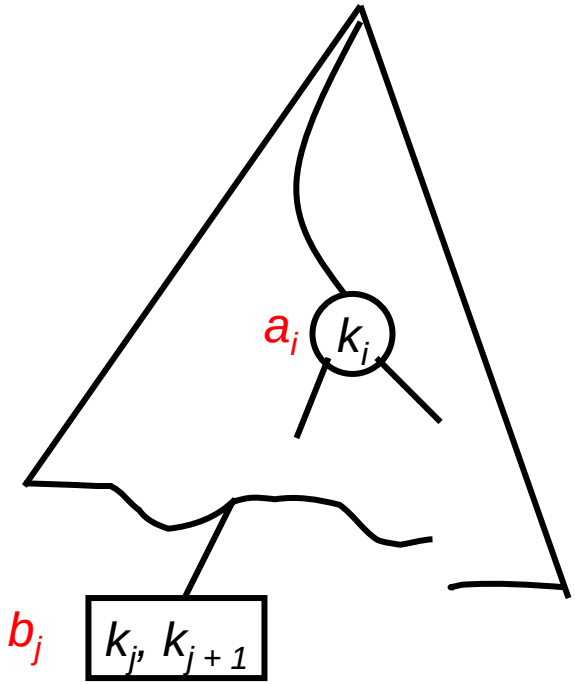


$P(T_1) = 21$



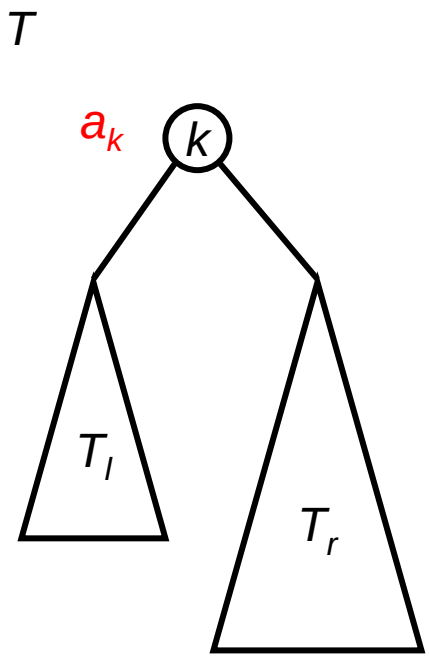
$P(T_2) = 27$

Konstruktion optimaler Suchbäume



Ein optimaler Suchbaum ist ein Suchbaum mit minimal möglicher gewichteter Pfadlänge.

Konstruktion optimaler Suchbäume



$P(T) = P(T_l) + G(T_l) + P(T_r) + G(T_r) + a_{Wurzel}$

$= P(T_l) + P(T_r) + G(T)$ *mit*

$G(T)$:= Gesamtgewicht der Knoten von T

Ist T Baum mit minimaler gewichteter Pfadlänge, so auch T_l und T_r

Konstruktion optimaler Suchbäume

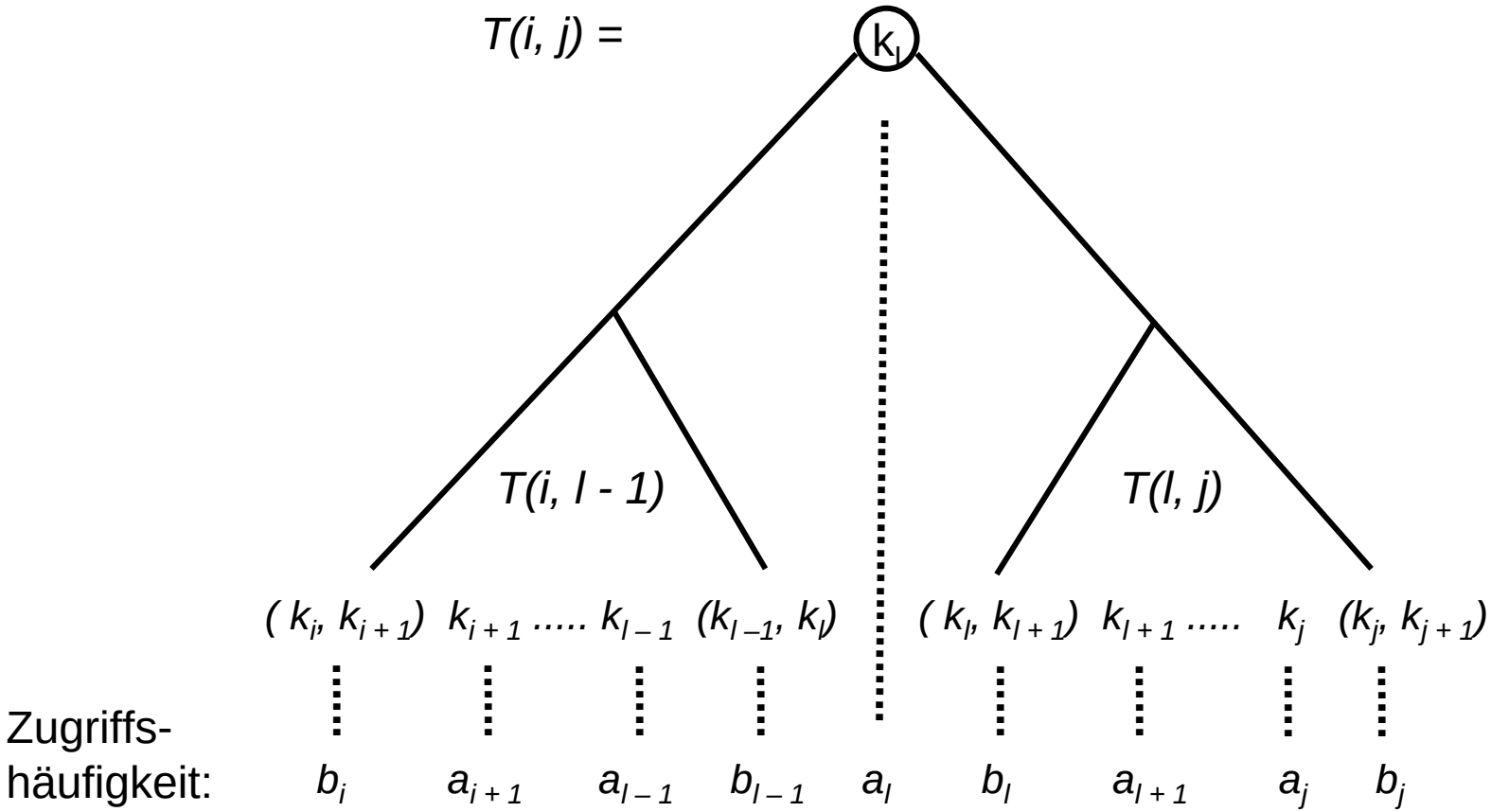
Sei

T(i, j) optimaler Suchbaum für $(k_i, k_{i+1})\ k_{i+1} \ldots\ k_j\ (k_j, k_{j+1})$,

W(i, j) das Gewicht von T(i, j), also $W(i, j) = b_i + a_{i+1} + \ldots + a_j + b_j$,

P(i, j) die gewichtete Pfadlänge von T(i, j).

Konstruktion optimaler Suchbäume



Konstruktion optimaler Suchbäume

$W(i, i) = b_i$, für $0 \leq i \leq n$

$W(i, j) = W(i, j-1) + a_j + b_j$, für $0 \leq i < j \leq n$

$P(i, i) = 0$, für $0 \leq i \leq n$

$P(i, j) = W(i, j) + \min_{i < l \leq j} \{ P(i, l-1) + P(l, j) \}$, für $0 \leq i < j \leq n$

r(i, j) = diejenige Zahl, für die das Minimum angenommen wird

Konstruktion optimaler Suchbäume

Anfangsfälle

Fall 1: $h = j - i = 0$

$T(i, i) = (k_i, k_{i+1})$

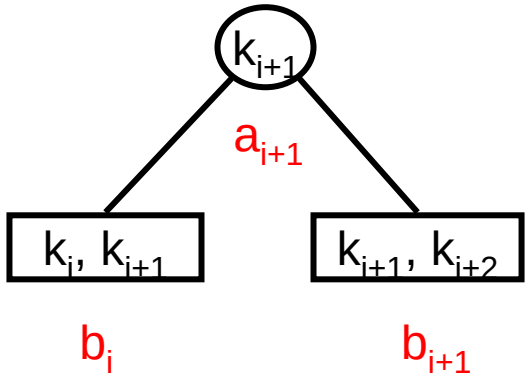
$W(i, i) = b_i$

$P(i, i) = 0$, $r(i, i)$ undefiniert

Konstruktion optimaler Suchbäume

Fall 2: $h = j - i = 1$

T(i, i+1)



$W(i, i+1) = b_i + a_{i+1} + b_{i+1} = W(i, i) + a_{i+1} + W(i+1, i+1)$

$P(i, i+1) = W(i, i+1)$

$r(i, i+1) = i + 1$

Berechnung der optimalen Pfadlänge mit dynamischer Programmierung

Fall 3: h = j - i > 1

for h = 2 **to** n **do**

  for i = 0 **to** (n – h) **do**

    { j = i + h;

      finde das (größte) l, i < l ≤ j, für das P(i, l – 1) + P(l, j) minimal wird;

      P(i, j) = P(i, l –1) + P(l, j) + W(i, j);

      r(i, j) = l;

    }

Konstruktion optimaler Suchbäume

Definiere:

$$\left.\begin{aligned} P(i,j) &:= \text{opt. Pfadlänge für} \\ G(i,j) &:= \text{Summe von} \end{aligned}\right\} b_i a_{i+1} b_{i+1} \ldots a_j b_j$$

Dann ist

$$G(i,j) = \begin{cases} b_i & \text{falls } i = j \\ G(i,j-1) + a_j + G(j,j) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ G(i,j) + \min\limits_{i<l\le j} \{P(i,l-1) + P(l,i)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Die gesuchte Lösung $P(0,n)$ kann in Zeit $O(n^3)$ und Platz $O(n^2)$ berechnet werden.

Konstruktion optimaler Suchbäume

Satz

Ein optimaler Suchbaum für n Schlüssel und $n + 1$ Intervalle mit gegebenen Zugriffshäufigkeiten kann in Zeit $O(n^3)$ konstruiert werden.