# Spannbäume minimalen Gewichts

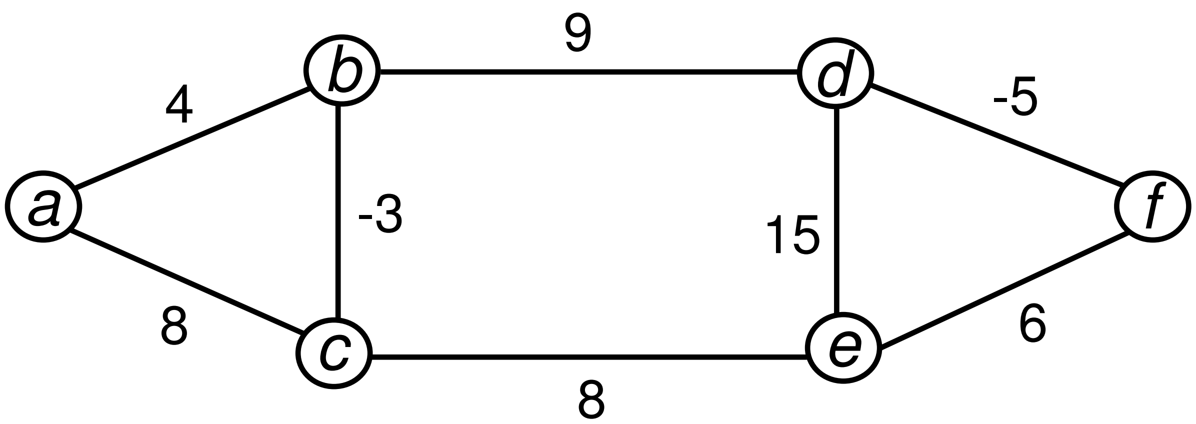
# 1. Minimale Spannbäume

Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ Kostenfunktion $c: E \rightarrow R$

Sei $T \subseteq E$ ein Baum (zusammenhängender azyklischer Teilgraph)

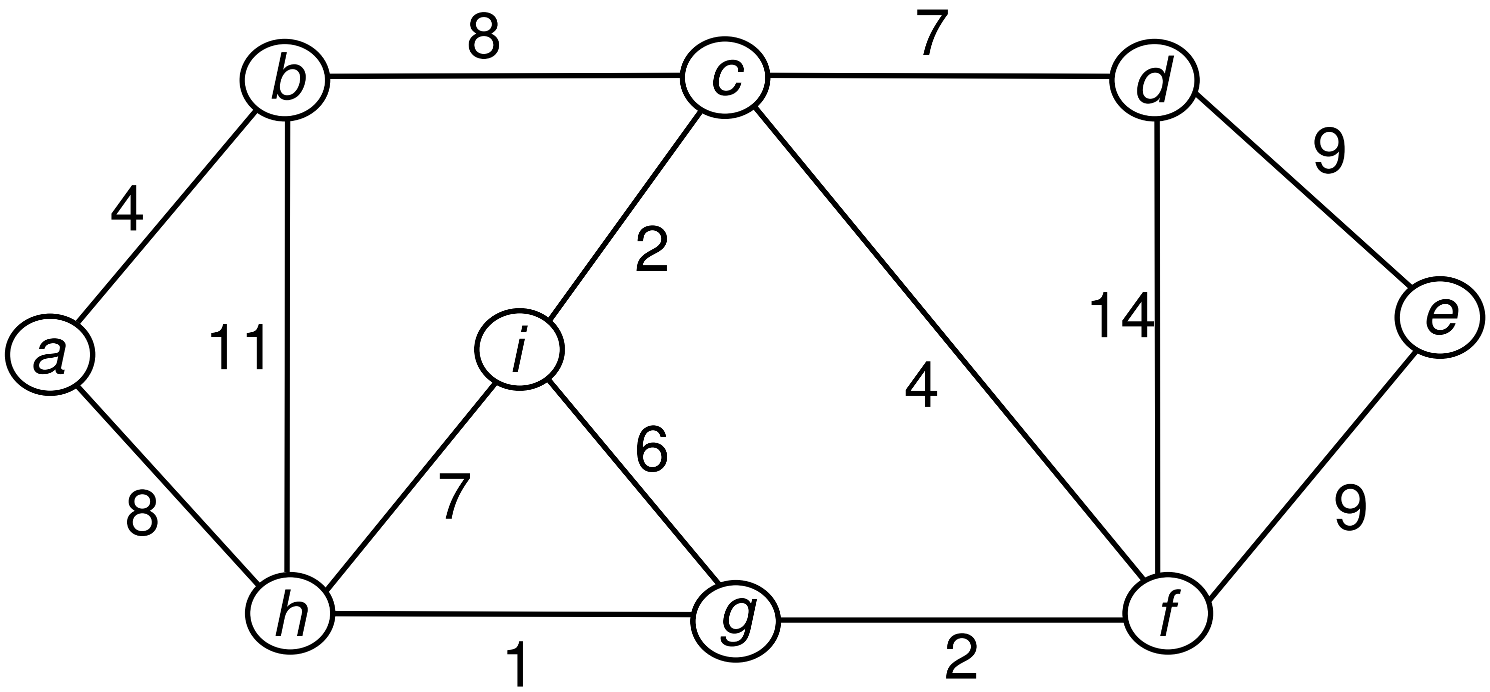
Kosten von $T$:

$$c(T) = \sum_{(u,v) \in T} c(u,v)$$



# Minimale Spannbäume

Ein minimaler Spannbaum ist ein Baum $T \subseteq E$, der alle Knoten in $V$ verbindet und minimale Kosten hat.



# Das Wachsen von min. Spannbäumen

**Invariante:** Verwalte Menge $A \subseteq E$, die Teilmenge eines mininalen Spannbaums ist.

**Definition:** Eine Kante $(u,v) \in E \setminus A$ ist sicher für $A$, wenn $A \cup \{(u,v)\}$ Teilmenge eines minimalen Spannbaums ist.

# Greedy-Ansatz

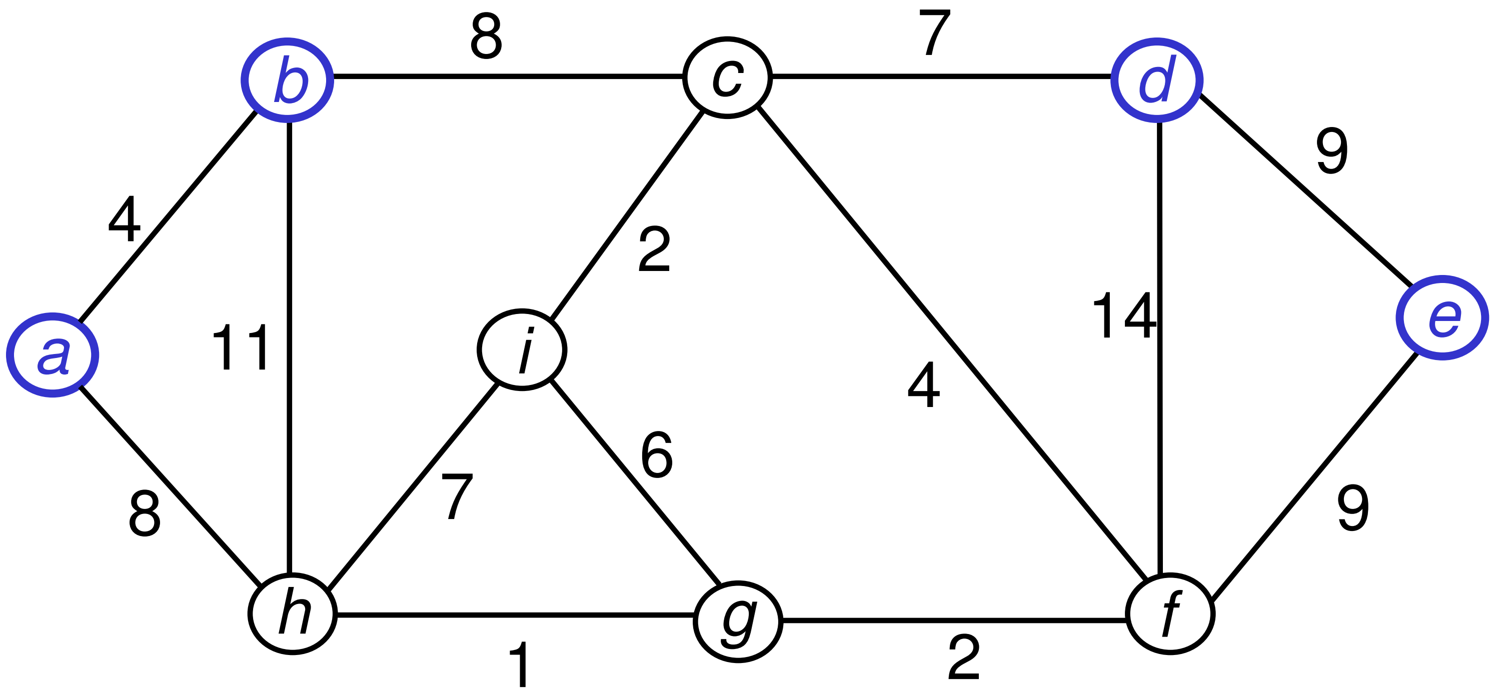
**Algorithmus** Generischer-MST($G$,$c$);

1. $A \leftarrow \varnothing$;
2. **while** $A$ ist kein Spannbaum **do**
3. Finde sichere Kante ($u$,$v$) für $A$;
4. $A \leftarrow A \cup \{(u,v)\}$;
5. **endwhile;**

# 2. Schnitte

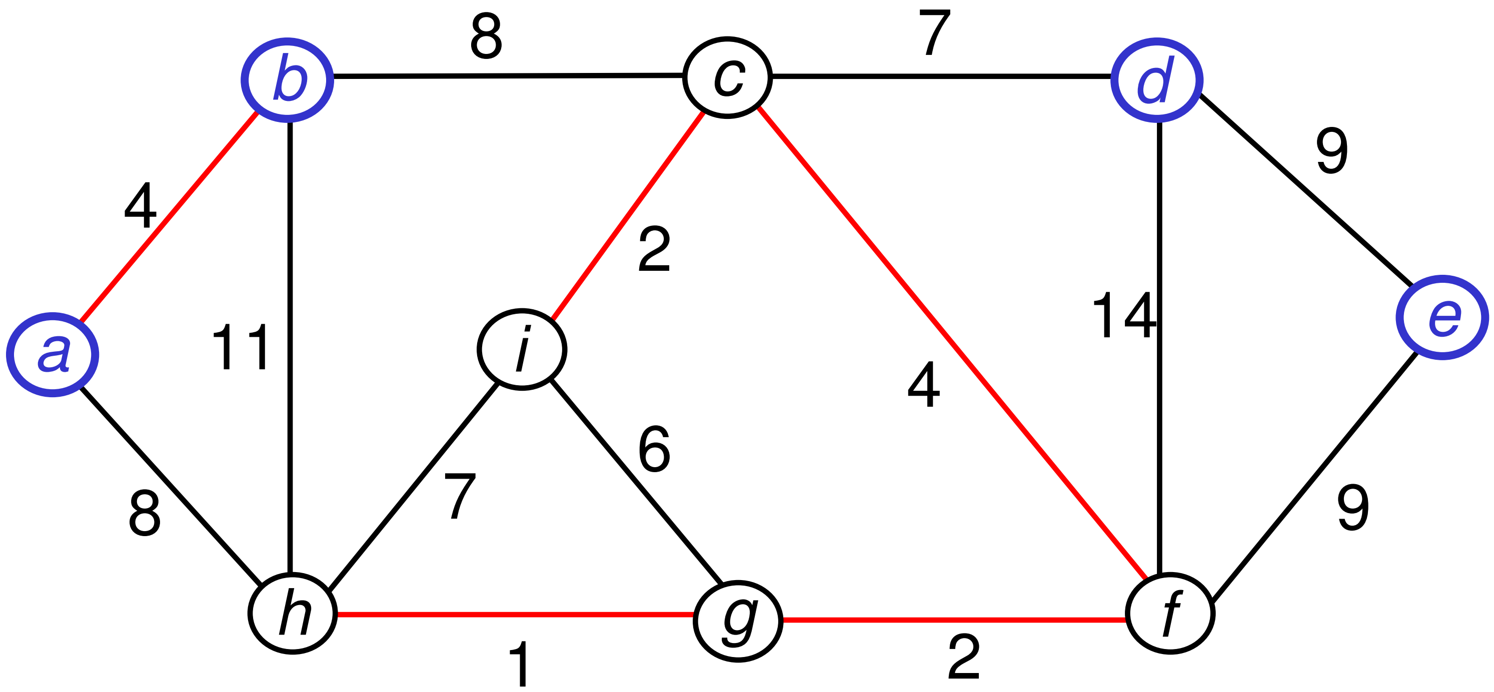
Ein Schnitt $(S, V \setminus S)$ ist eine Partition von $V$.

Eine Kante $(u,v)$ schneidet $(S, V \setminus S)$ , wenn ein Endpunkt in $S$ und der andere in $V \setminus S$ liegt.



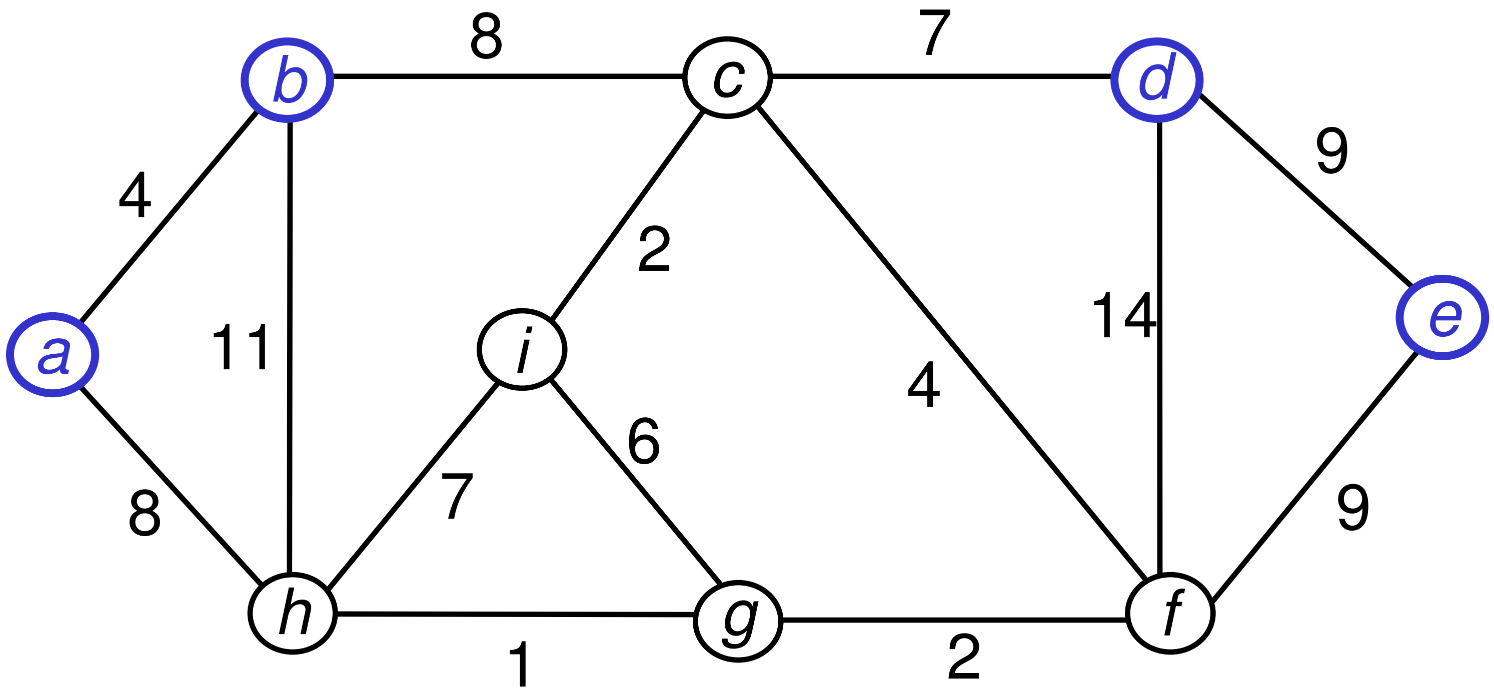
# Schnitte

Ein Schnitt respektiert *A*, wenn keine Kante aus *A* den Schnitt schneidet.



# Schnitte

Eine Kante heißt minimal bzgl. eines Schnitts, wenn sie den Schnitt schneidet und unter allen solchen Kanten minimale Kosten hat.



# 3. Sichere Kanten

**Satz:** Sei $A$ Teilmenge eines min. Spannbaums $T$ und $(S, V \setminus S)$ ein Schnitt, der $A$ respektiert. Ist $(u,v)$ eine minimale Kante bzgl. $(S, V \setminus S)$, dann ist $(u,v)$ sicher für $A$.

**Beweis:**

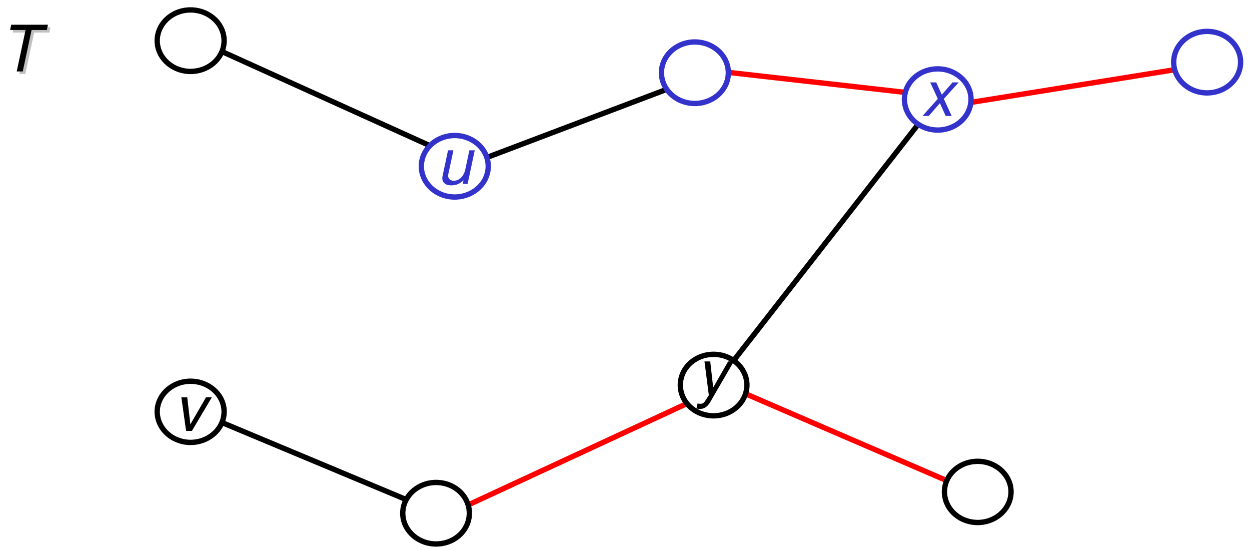
1. Fall: $(u,v) \in T$ : ok

2. Fall: $(u,v) \notin T$

   Wir konstruieren min. Spannbaum $T'$ mit $(u,v) \in T'$ und

   $A \subseteq T'$

# Sichere Kanten




Durch Hinzufügen von ($u$,$v$) zu $T$ erhalten wir einen Zyklus.
Auf diesem gibt es (mindestens) eine Kante ($x$,$y$), die ebenfalls den Schnitt schneidet.

# Sichere Kanten

$$T' = T \setminus \{(x,y)\} \cup \{(u,v)\}$$

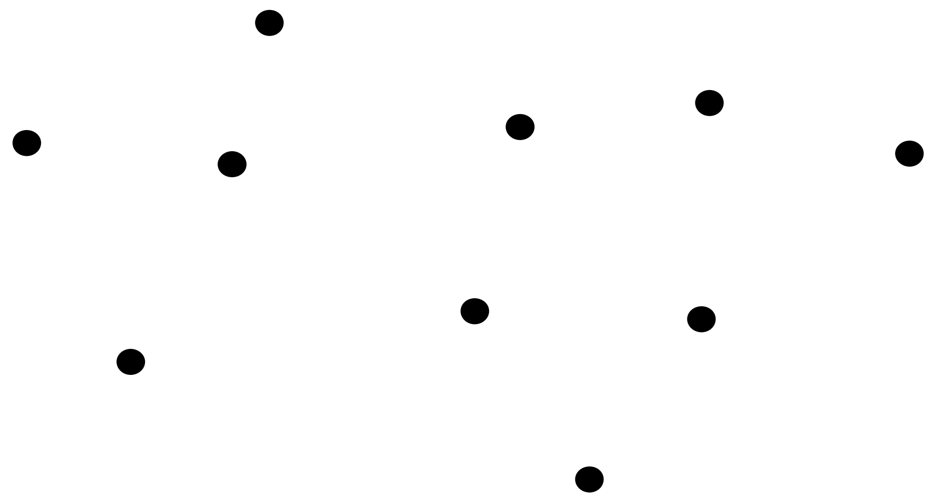
ist ein min. Spannbaum, denn

$$c(T') = c(T) - c(x,y) + c(u,v) \leq c(T)$$

# 4. Der Graph $G_A$

$G_A = (V, A)$

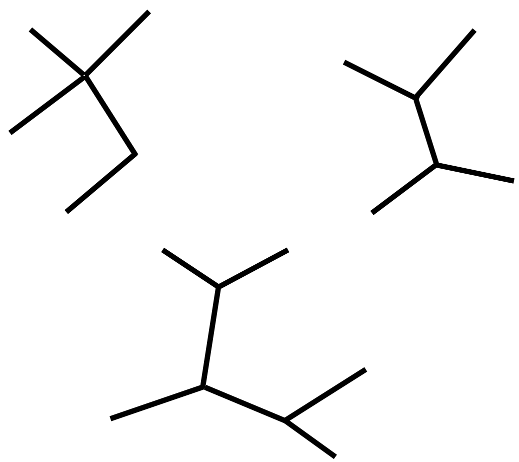
- ist ein Wald, d.h. eine Menge von Bäumen
- anfangs, wenn $A = \emptyset$, ist jeder Baum ein einzelner Knoten
- eine sichere Kante verbindet verschiedene Bäume



# Der Graph $G_A$

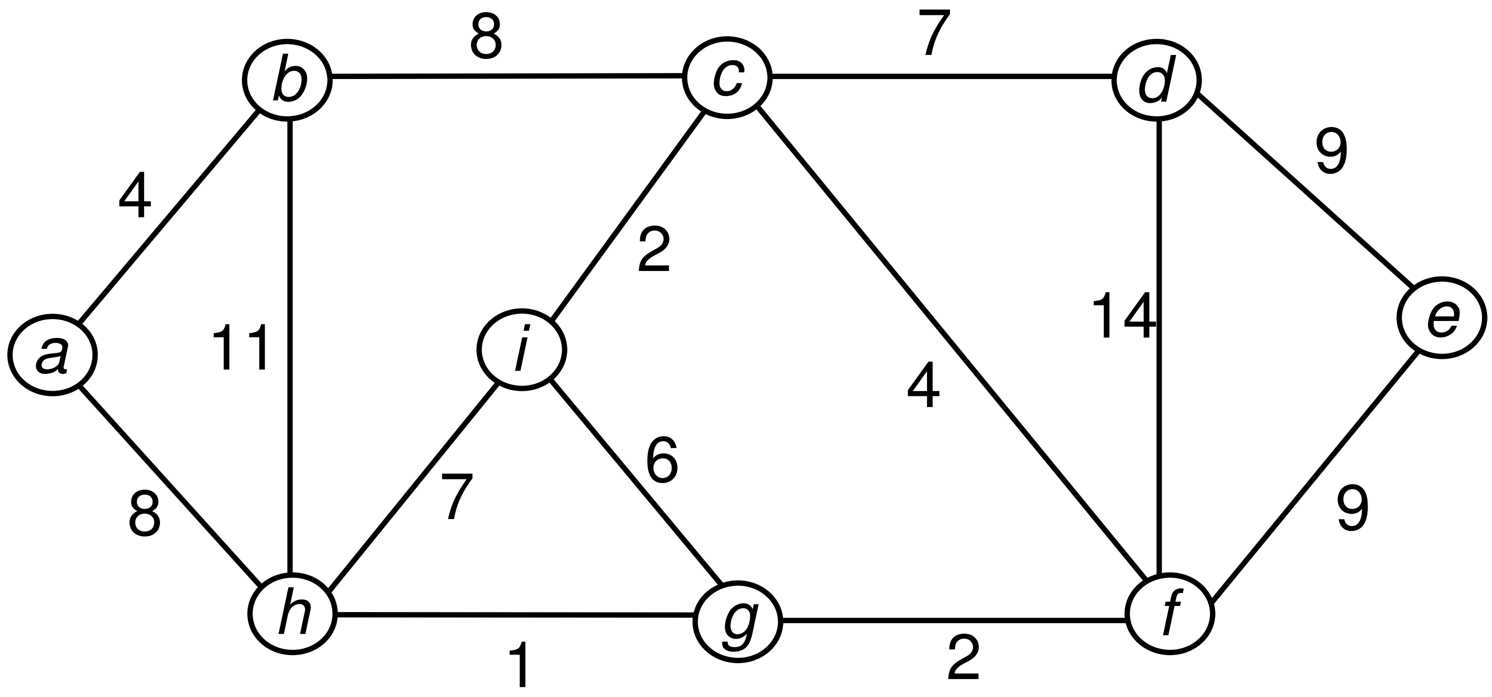
**Korollar:** Sei $B$ ein Baum in $G_A = (V, A)$. Ist $(u,v)$ eine Kante minimaler Kosten, die $B$ und einen anderen Baum in $G_A$ verbindet, dann ist $(u,v)$ sicher für $A$.

**Beweis:** $(B, V \setminus B)$ respektiert $A$ und
$(u,v)$ ist eine min. Kante für diesen Schnitt.



# 5. Algorithmus von Kruskal

Wähle stets eine Kante minimaler Kosten, die zwei Bäume $B_1$ und $B_2$ in $G_A$ verbindet.



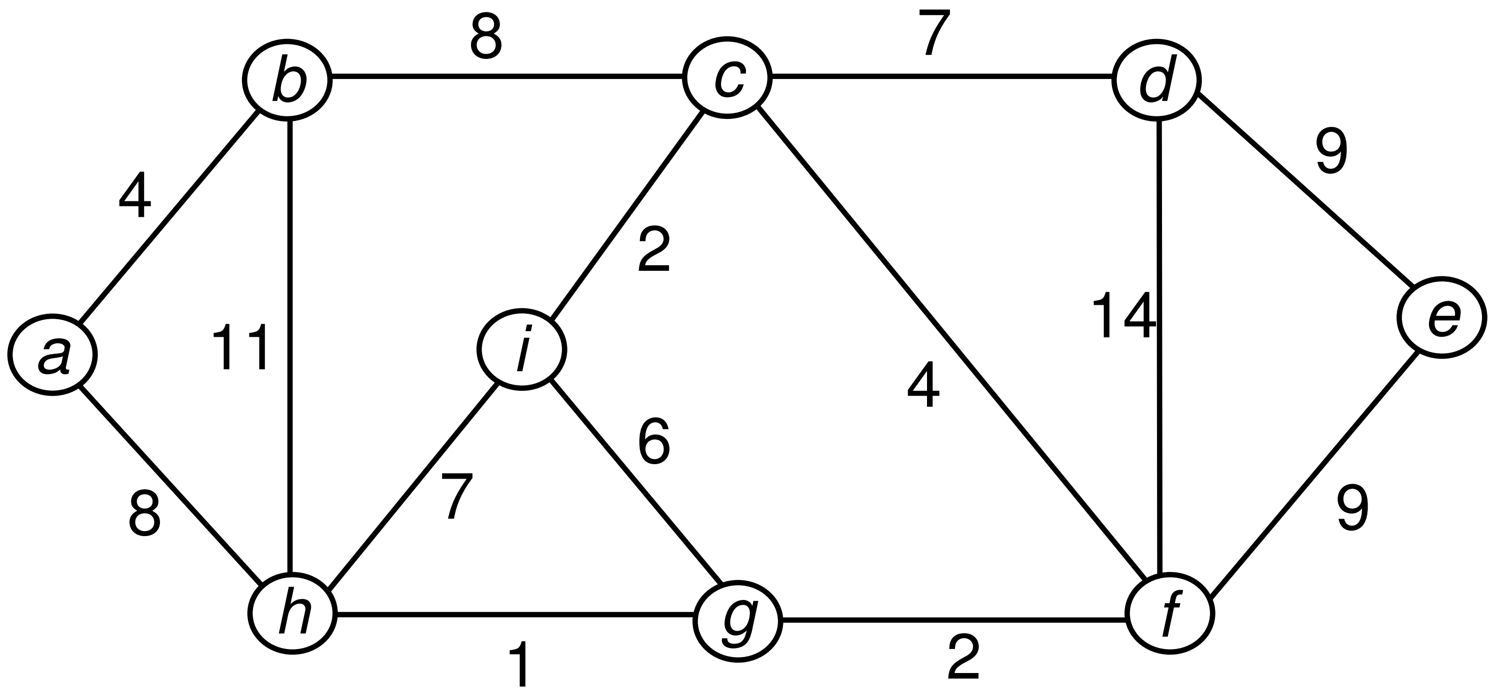
# Algorithmus von Kruskal

1. $A \leftarrow \varnothing$;
2. **for all** $v \in V$ **do** $B_v \leftarrow \{ v \}$; **endfor;**
3. Erzeuge eine Liste $L$ der Kanten in $E$, welche gemäß nicht-fallenden Kantenkosten sortiert ist;
4. **for all** $(u,v)$ in $L$ **do**
5. $\quad B_1 \leftarrow$ FIND($u$); $B_2 \leftarrow$ FIND($v$);
6. $\quad$ **if** $B_1 \neq B_2$ **then**
7. $\qquad A \leftarrow A \cup \{(u,v)\}$; UNION ($B_1$, $B_2$, $B_1$);
8. $\quad$ **endif;**
9. **endfor;**

Laufzeit: $O( m\,\alpha(n) + m + m \log n )$

# 6. Algorithmus von Prim

*A* ist immer ein einziger Baum. Starte mit einem beliebigen Wurzelknoten *w*. Füge in jedem Schritt eine minimale Kante hinzu, die einen Knoten in *A* mit einem Knoten in *V* \ *A* verbindet.



# Implementierung

$Q$ : Prioritätswarteschlange, die alle Knoten $v \in V \setminus A$ enthält.

Schlüssel von $v$: min. Kosten einer Kante, die $v$ mit einem Knoten aus $A$ verbindet.

Für einen Knoten $v$ ist $p[v]$ der Elter-Knoten von $v$ in dem Baum.

$A = \{ (v, p[v]) : v \in V - \{w\} - Q\}$

# Algorithmus von Prim

```
for all v ∈ V do Insert(Q, ∞, v); endfor;
Wähle einen Knoten w ∈ V als Wurzel;
DecreaseKey(Q, 0, w); p[w] ← nil;
while ¬Empty(Q) do
    (d, u) ← DeleteMin(Q);
    for all (u,v) ∈ E do
        if v ∈ Q und c(u,v) < Schlüssel von v then
            DecreaseKey(Q, c(u,v), v); p[v] ← u;
        endif;
    endfor;
endwhile;
```

Laufzeit: $O(n \log n + m)$