Bin Packing

Bin Packing

1. Problembeschreibung und einfache Beobachtungen

2. Approximative Lösung des Online Bin Packing Problems

3. Approximative Lösung des Offline Bin Packing Problems

Problembeschreibung

Gegeben:

n Objekte der Größen

$$s_1, \dots , s_n$$

mit $0 < s_i \leq 1$, für $1 \leq i \leq n$.

Gesucht:

Die kleinst mögliche Anzahl von Kisten (Bins) der Größe 1, mit der alle Objekte verpackt werden können.

Beispiel:

7 Objekte mit Größen 0.2, 0.5, 0.4, 0.7, 0.1, 0.3, 0.8

Problembeschreibung

Online Bin Packing:

Jedes (ankommende) Objekt muss verpackt sein, bevor das nächste Objekt betrachtet wird. Ein Objekt verbleibt in derjenigen Kiste, in die es zuerst gepackt wird.

Offline Bin Packing:

Zunächst wird die Anzahl n und alle n Objekte vorgegeben. Dann beginnt die Verpackung.

Beobachtung

- Bin Packing ist beweisbar schwer.
  (Offline Version ist NP-schwer.
  Entscheidungsproblem ist NP-vollständig.)

- Kein Online Bin Packing Verfahren kann stets eine optimale Lösung liefern

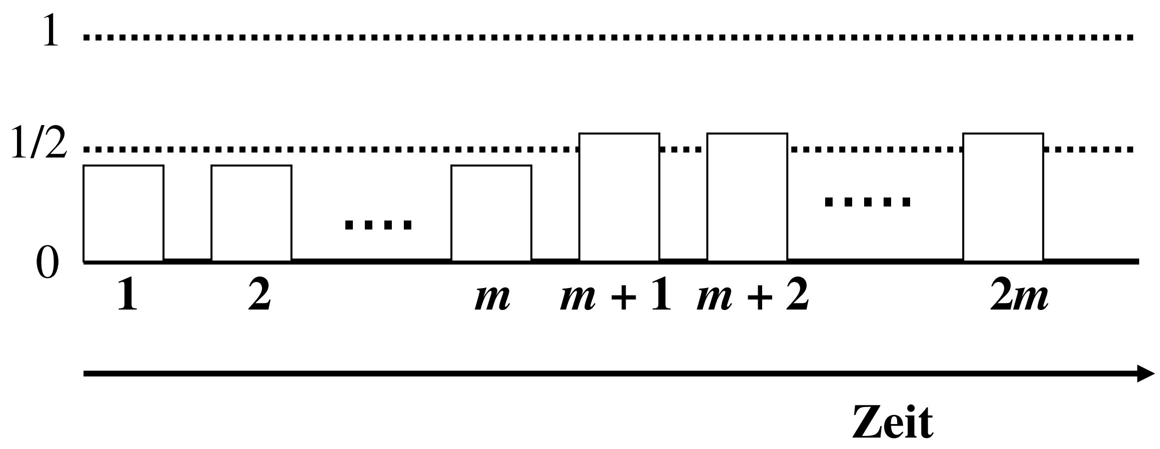
Online Verfahren

Satz 1

Es gibt Eingaben, die jeden Online Bin Packing Algorithmus zwingen, wenigstens *4/3* OPT Bins zu verwenden, wobei OPT die minimal mögliche Binzahl ist.

Beweis:

Annahme: Online Bin Packing Algorithmus A benötigt stets weniger als *4/3* OPT Bins



Online Verfahren

Zeitpunkt 1:

$OPT = m/2$ und #Bins(A) = b

Es gilt nach Annahme: $b<4/3 \cdot m/2 = 2/3m$

Sei $b = b_1 + b_2$, wobei

b_1 = #Bins mit einem Objekt

b_2 = #Bins mit zwei Objekten

Es gilt: $b_1 + 2\, b_2 = m$, d.h. $b_1 = m - 2b_2$

und damit $b = b_1 + b_2 = m - b_2 \quad (*)$

Online Verfahren

Zeitpunkt 2:

$OPT = m$

#Bins(A) $\geq b + m - b_1 = m + b_2$

Annahme: $m + b_2 \leq$ #Bins(A) $< 4/3m$

$b_2 < m/3$

$\Longrightarrow$ mit (∗): $b = m - b_2 > 2/3m$

Online Verfahren

Next Fit (NF), First-Fit (FF), Best-Fit (BF)

Next Fit:

Verpacke das nächste Objekt in dieselbe Kiste wie das vorherige, wenn es dort noch hineinpasst, sonst öffne eine neue Kiste und verpacke es dort.

Satz 2

(a) Für alle Inputfolgen I gilt:

$$NF(I) \leq 2OPT(I).$$

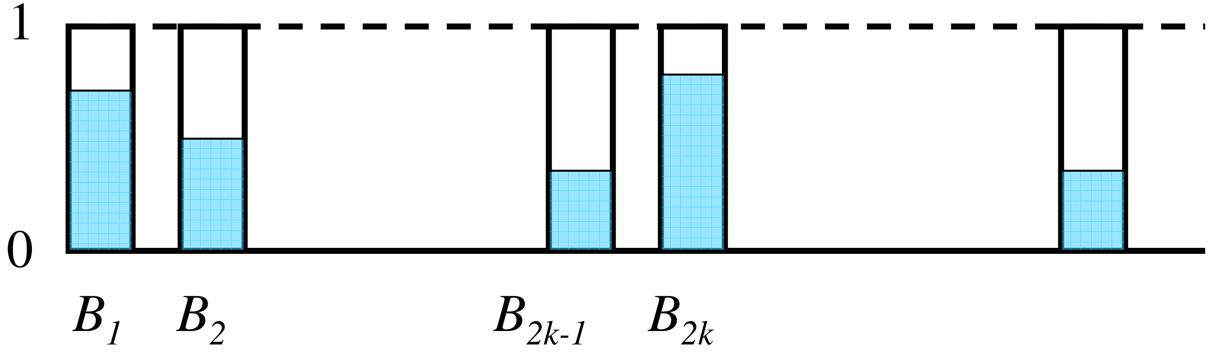
(b) Es gibt Inputfolgen I mit:

$$NF(I) \geq 2OPT(I) - 2.$$

Next Fit

Beweis: (a)

Betrachte zwei Kisten B_{2k-1}, B_{2k}, $2k \leq NF(\,I\,)$.



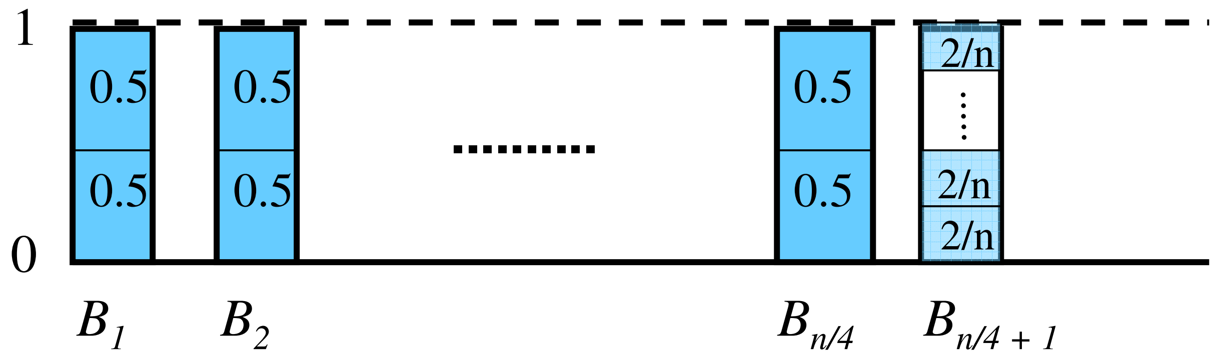
Next Fit

Beweis: (b)

Betrachte Inputfolge I mit Länge n
($n \equiv 0 \pmod 4$):

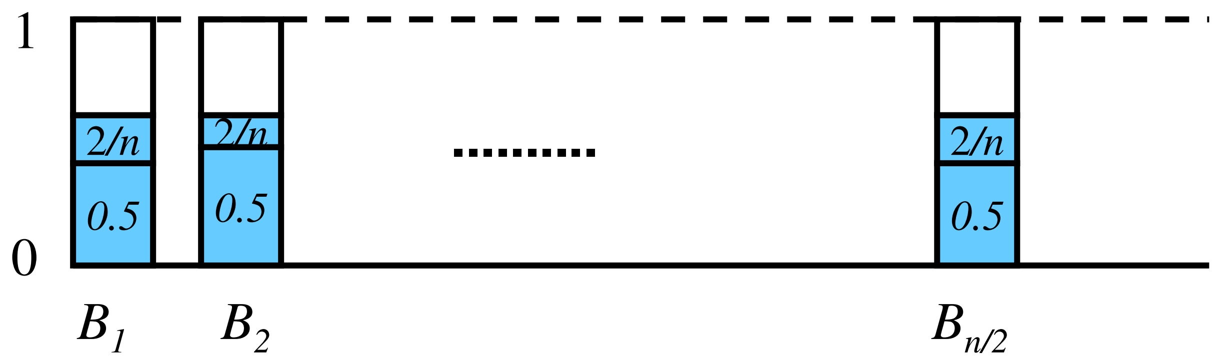
0.5, 2/n, 0.5, 2/n, 0.5, ... , 0.5, 2/n

Optimale Packung:



Next Fit

Next Fit liefert:



$NF\,(\,I\,) =$

$OPT\,(\,I\,) =$

First Fit

First Fit:

Packe nächstes Objekt in die erste Kiste, in die es noch hineinpasst, wenn es eine solche Kiste gibt, sonst in eine neue Kiste.

Beobachtung:

Zu jedem Zeitpunkt kann es höchstens eine Kiste geben, die weniger als halb voll ist.

$\rightarrow$ $FF(I) \leq 2OPT(I)$

First Fit

Satz 3

(a) Für alle Inputfolgen I gilt:

$$FF(I) \leq \lceil 17/10\ OPT(I) \rceil$$

(b) Es gibt Inputfolgen I mit:

$$FF(I) \geq 17/10\ (OPT(I) - 1)$$

(b´) Es gibt Inputfolgen I mit:

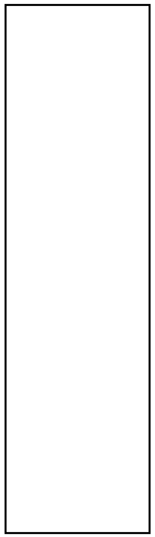
$$FF(I) = 10/6\ OPT(I)$$

First Fit

Beweis (b`): Inputfolge der Länge 3 · 6m

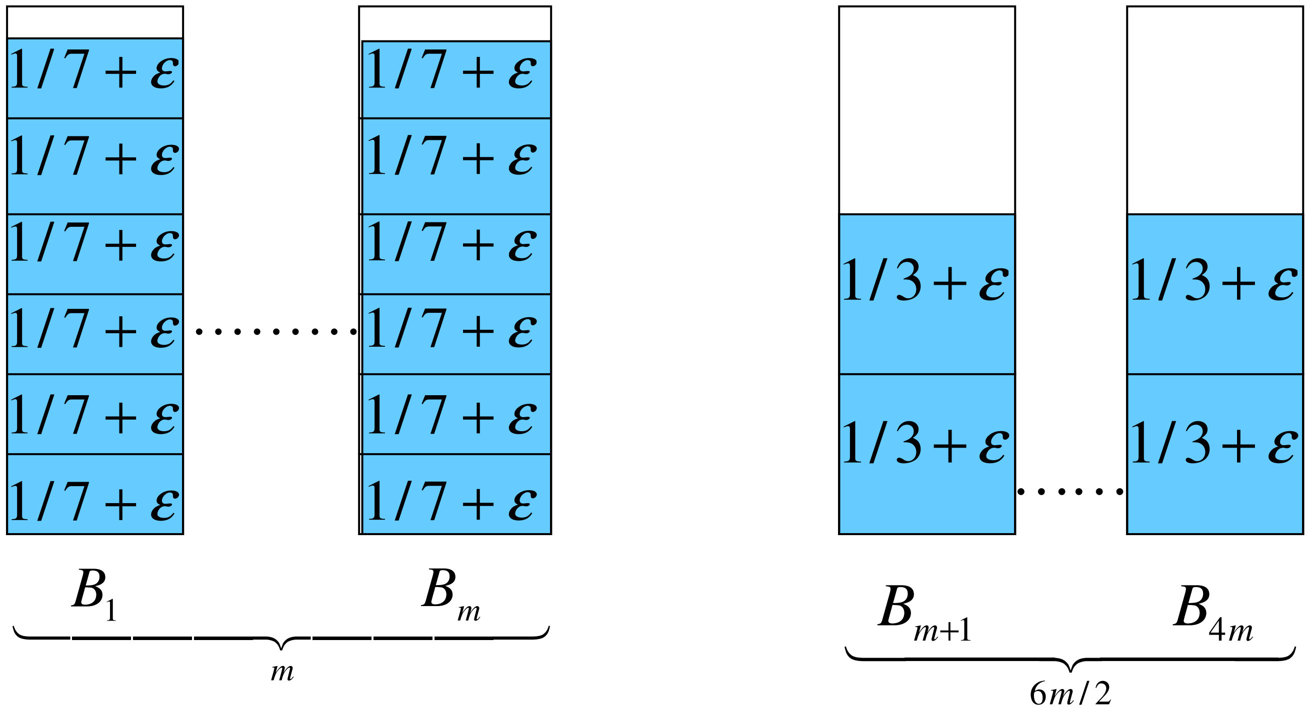
$$\underbrace{1/7+\varepsilon,\ldots,1/7+\varepsilon}_{6m},\underbrace{1/3+\varepsilon,\ldots,1/3+\varepsilon}_{6m},$$

$$\underbrace{1/2+\varepsilon,\ldots,1/2+\varepsilon}_{6m}$$

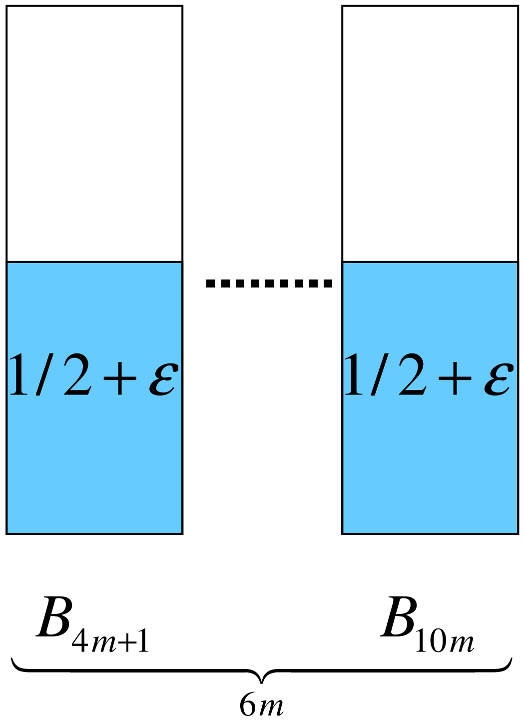


First Fit

First-Fit liefert:



First Fit



Best Fit

Best Fit:

Verpacke das nächste Objekt in diejenige Kiste, in die es am besten passt (d.h. den geringsten Platz ungenutzt lässt).

Verhalten von BF ähnlich zu FF

Laufzeit für Inputfolgen der Länge n

NF $O(n)$

FF $O(n^2) \longrightarrow O(n \log n)$

BF $O(n^2) \longrightarrow O(n \log n)$

Off-line Verfahren

n und $s_1, \ldots, s_n$ sind gegeben, bevor die Verpackung beginnt

Optimale Packung kann durch erschöpfende Suche bestimmt werden.

Idee für off-line Approximationsalgorithmus:
Sortiere die Objekte zunächst nach abnehmender Größe und verpacke größere Objekte zuerst!

First Fit Decreasing (FFD) bzw. **FFNI**
Best Fit Decreasing (BFD)

First Fit Decreasing

Lemma 1

Sei I eine Folge von n Objekten mit Größen

$$s_1 \geq s_2 \geq ..... \geq s_n$$

und sei $m = OPT(I)$.

Dann haben alle von FFD in den Bins

$$B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots , B_{FFD(I)}$$

verpackten Objekte eine Größe von höchstens 1/3.

First Fit Decreasing

Lemma 2

Sei I eine Folge von n Objekten mit Größen

$$s_1 \geq s_2 \geq ..... \geq s_n$$

und sei $m = OPT(I)$.

Dann ist die Anzahl der Objekte, die FFD in die Kisten

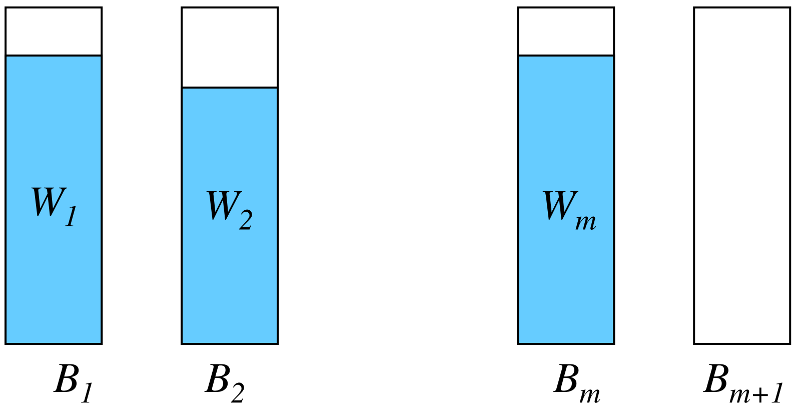
$$B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots , B_{FFD(I)}$$

verpackt, höchstens $m - 1$.

First Fit Decreasing

Beweis:

Annahme: Es gibt mehr als $m - 1$ Objekte $x_1, \ldots, x_m$ in I, die FFD in extra Kisten verpackt.



First Fit Decreasing

Satz

Für alle Inputfolgen I gilt:

$$FFD(I) \leq (4\,OPT(I) + 1)/3.$$

Satz

1. Für alle Inputfolgen I gilt:

$$FFD(I) \leq 11/9\,OPT(I) + 4.$$

2. Es gibt Inputfolgen I mit:

$$FFD(I) = 11/9\,OPT(I).$$

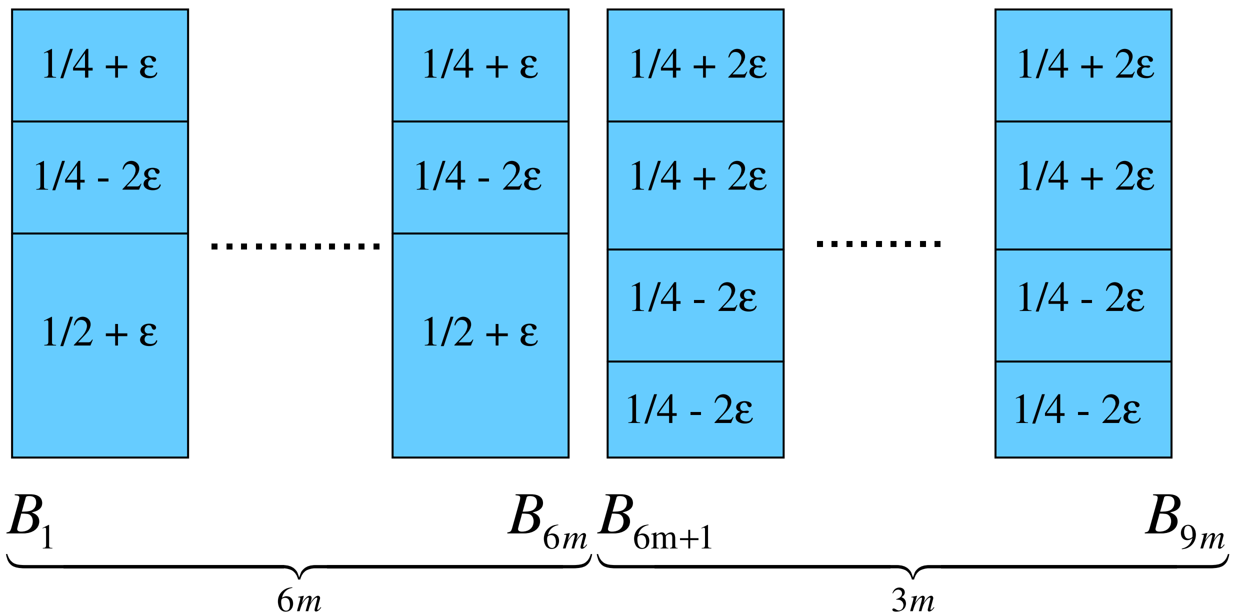
First Fit Decreasing

Beweis (b): Inputfolge der Länge $3 \cdot 6m + 12m$

$$\underbrace{1/2+\varepsilon,\ldots,1/2+\varepsilon}_{6m},\underbrace{1/4+2\varepsilon,\ldots,1/4+2\varepsilon}_{6m}$$

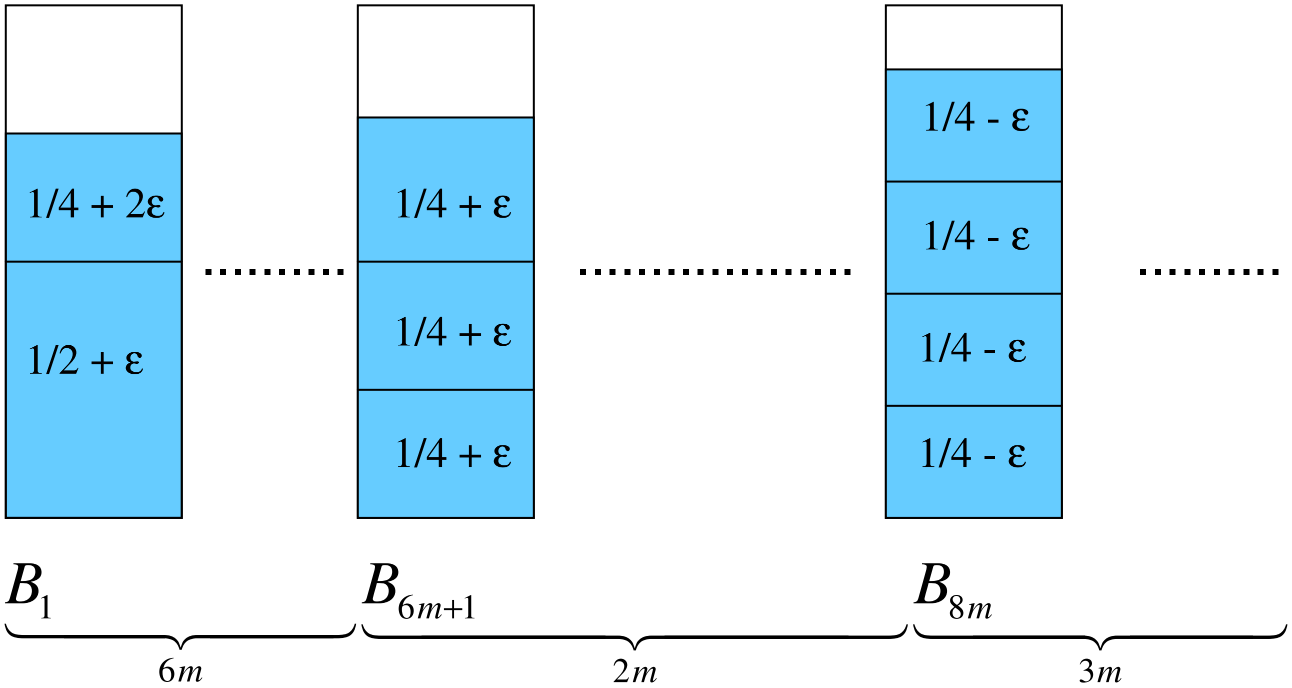
$$\underbrace{1/4+\varepsilon,\ldots,1/4+\varepsilon}_{6m},\underbrace{1/4-2\varepsilon,\ldots,1/4-2\varepsilon}_{12m}$$

Optimale Packung:



First Fit Decreasing

First Fit Decreasing liefert:



$$OPT(I) = 9m$$
$$FFD(I) = 11m$$