Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. Fabian Kuhn
P. Bamberger, Y. Maus, P. Schneider

Informatik 2 - Sommersemester 2018
Übungsblatt 11*

Abgabe: Freitag, 27. Juli, 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Huffman-Kodierung *(12 Punkte)*

Sei $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ ein Alphabet. Die Wahrscheinlichkeit p_x (Vorlesung: Frequenz) für ein Zeichen $x \in \Sigma$, sei wie folgt: $p_a = 0.4, p_b = 0.3, p_c = 0.2, p_d = 0.1$.

(a) Geben Sie die Entropie der gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit zwei Nachkommastellen Genauigkeit an (schneiden Sie die anderen Nachkommastellen ab). *(2 Punkte)*

(b) Berechnen Sie eine Huffman-Kodierung von Σ und anschließend die *erwartete Länge der Kodierung* eines zufälligen Zeichens bzgl. dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung. *(3 Punkte)*

Sei $\Sigma^2 = \{aa, ab, \dots, dd\}$ das Alphabet der Tupel der Zeichen aus Σ. Wir nehmen an, dass die obige Wahrscheinlichkeitsverteilung stochastisch unabhängig ist. Deshalb kann die Wahrscheinlichkeit, dass man nach obiger Verteilung zwei Zeichen $xy \in \Sigma^2$ erhält, als $p_{xy} := p_x \cdot p_y$ ausgedrückt werden.

(c) Geben Sie die Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung p_{xy} für $xy \in \Sigma^2$ mit zwei Nachkommastellen Genauigkeit an. Teilen Sie das Ergebnis durch 2. *(2 Punkte)*

(d) Berechnen Sie eine Huffman-Kodierung von Σ^2 bzgl. p_{xy}. Berechnen Sie die *erwartete Länge der Kodierung* eines zufälligen Tupels (verteilt mit p_{xy}). Teilen Sie das Ergebnis durch 2. *(5 Punkte)*

Aufgabe 2: Gieriger Dieb *(6 Punkte)*

Ein Dieb in einem Juwelenladen möchte den Gesamtwert seiner gestohlenen Schmuckstücke maximieren. Er kann dabei höchstens ein Gewicht von $W > 0$ tragen und die n ausgestellten Schmuckstücke haben Gewichte $w_1, \dots, w_n \leqslant W$ und Werte $v_1, \dots, v_n \geqslant 0$.

(a) Formulieren Sie einen einfachen Greedy Algorithmus der eine Auswahl von Schmuckstücken für den Dieb in $\mathcal{O}(n \log n)$ trifft. *(3 Punkte)*

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel von Schmuckstücken an, in dem der Gesamtwert der Greedy Wahl einen Anteil von höchstens $0 < \varepsilon < 1$ des Gesamtwertes der optimalen Wahl von Schmuckstücken erreicht. *(3 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie also, dass der Gesamtwert der Greedy Wahl von Schmuckstücken (relativ gesehen) beliebig viel kleiner als der Gesamtwert der optimalen Wahl wird.

*Dies ist ein Bonusübungsblatt dessen Punkte zwar angerechnet werden aber nicht in die Summe der maximal erreichbaren Punkte einfließen.

Aufgabe 3: Graphen färben *(12 Punkte)*

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und maximalem Grad Δ ($\Delta = \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$). Eine c-Färbung ($c \in \mathbb{N}$) von G ist eine Abbildung $\phi : V \to \{1, \ldots, c\}$, so dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben, d.h. $\phi(u) \neq \phi(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.
Die chromatische Zahl $\chi(G)$ von G, ist die minimale Anzahl Farben, mit der sich G färben lässt.

(a) Formulieren Sie einen Greedy-Algorithmus zur Färbung eines Graphen. Der Algorithmus soll maximal $\Delta + 1$ Farben verwenden. Begründen Sie die Korrektheit des Algorithmus sowie die obere Schranke $\Delta + 1$ für die Anzahl an Farben. *(4 Punkte)*

(b) Beschreiben Sie eine Klasse von Graphen, für die $\chi(G) = \Delta + 1$ gilt. *(2 Punkte)*

(c) Beschreiben Sie eine Klasse von Graphen, bei der das Verhältnis $(\Delta + 1)/\chi(G)$ beliebig groß wird. *(2 Punkte)*

Nun möchte man zusätzlich auch die Kanten von G färben, d.h. ein $c \in \mathbb{N}$ und eine Abbildung $\phi : V \cup E \to \{1, \ldots, c\}$ finden, so dass

1. Für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $\phi(u) \neq \phi(v)$.
2. Für alle adjazenten Kanten $e, e' \in E$ (d.h. $e \neq e'$ teilen einen Endpunkt) gilt $\phi(e) \neq \phi(e')$.
3. Für alle $u \in V, e \in E$ mit $u \in e$ gilt $\phi(u) \neq \phi(e)$.

(d) Formulieren Sie einen Greedy-Algorithmus, um die Kanten und Knoten von G mit $2\Delta + 1$ Farben zu färben (so dass die Bedingungen 1, 2, 3 erfüllt sind). Begründen Sie die Korrektheit und die maximale Anzahl Farben. *(4 Punkte)*