

Informatik II - SS 2018

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 8 (14.5.2018)

Hashtabellen III



**UNI
FREIBURG**

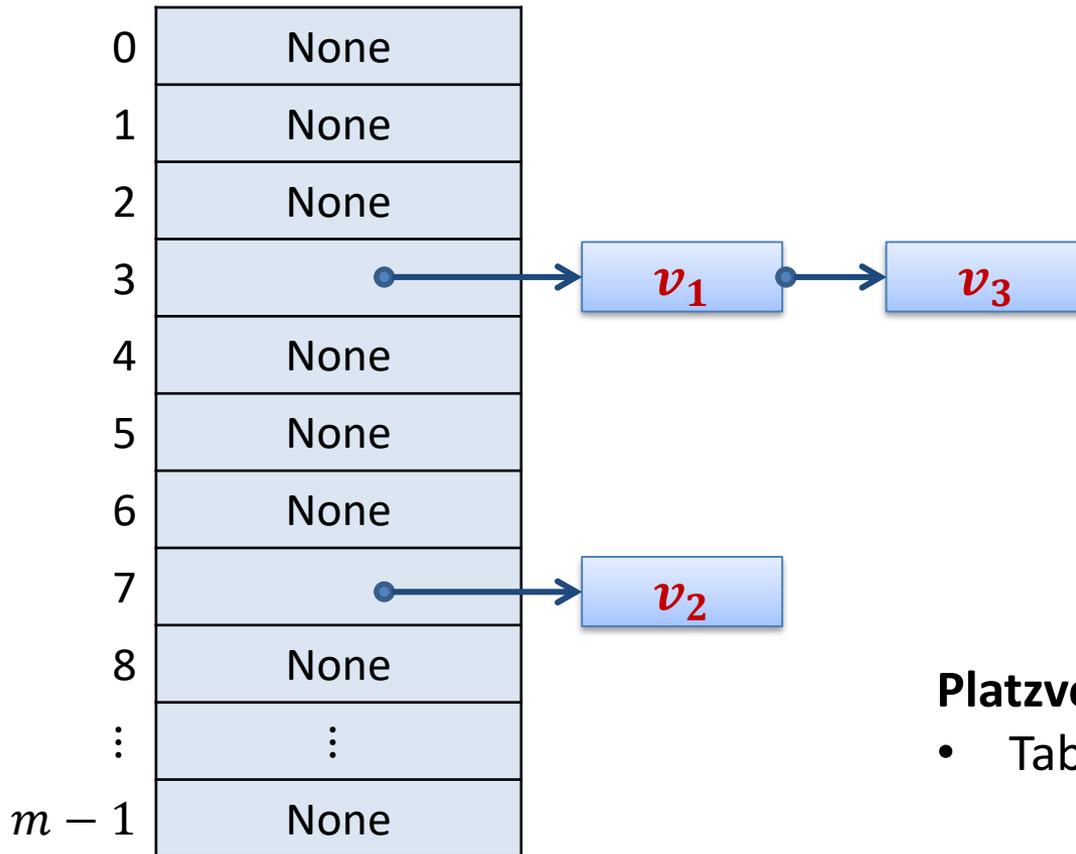
Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Hashtabellen mit Chaining

- Jede Stelle in der Hashtabelle zeigt auf eine verkettete Liste

Hashtabelle



Platzverbrauch: $O(m + n)$

- Tabellengrösse m , Anz. Elemente n

Ziel:

- Speichere alles direkt in der Hashtabelle (im Array)
- offene Adressierung = geschlossenes Hashing
- keine Listen

Grundidee:

- Bei Kollisionen müssen alternative Einträge zur Verfügung stehen
- Erweitere Hashfunktion zu

$$h: S \times \{0, \dots, m - 1\} \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$$

- Für jedes $x \in S$ sollte $h(x, i)$ durch alle m Werte gehen (für versch. i)
- Zugriff (schreiben/lesen) zu Element mit Schlüssel x :
 - Versuche der Reihe nach an den Positionen
 $h(x, 0), h(x, 1), h(x, 2), \dots, h(x, m - 1)$

Ziel: Verwende mehr als m verschiedene Abfolgen von Positionen

Idee: Benutze zwei Hashfunktionen

$$h(x, i) = (h_1(x) + i \cdot h_2(x)) \bmod m$$

Vorteile:

- Sondierfunktion hängt in zwei Arten von x ab
- Vermeidet die Nachteile von linearem und quadr. Sondieren
- Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schlüssel x und x' die gleiche Positionsfolge erzeugen:

$$h_1(x) = h_1(x') \wedge h_2(x) = h_2(x') \implies \text{WSK} = \frac{1}{m^2}$$

- Funktioniert in der Praxis sehr gut!

Offene Adressierung:

- Alle Schlüssel/Werte werden direkt im Array gespeichert
- Keine Listen nötig
 - spart den dazugehörigen Overhead...
- Nur schnell, solange der Load

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

nicht zu gross wird...

- dann ist's dafür besser als Chaining...
- $\alpha > 1$ ist nicht möglich!
 - da nur m Positionen zur Verfügung stehen

Was tun, wenn die Hashtabelle zu voll wird?

- Offene Adressierung: $\alpha > 1$ nicht möglich, bei $\alpha \rightarrow 1$ sehr ineff.
- Chaining: Komplexität wächst linear mit α

Was tun, wenn die gewählte Hashfunktion schlecht ist?

Rehash:

- Erstelle neue, grössere Hashtabelle, wähle neue Hashfunktion h'
- Füge alle Schlüssel/Werte neu ein

Beispiel: $X = \{5, 10, 11, 22\}$, $h(x) = x \bmod 4$, $h'(x) = 3x - 1 \bmod 8$

Ein Rehash ist teuer!

Kosten (Zeit):

- $\Theta(m + n)$: linear in der Anzahl eingefügten Elemente und der Länge der alten Hashtabelle
 - typischerweise ist das einfach $\Theta(n)$
- Wenn man es richtig macht, ist ein Rehash selten nötig.
- **richtig heisst:**
 - gute Hashfunktion (z.B. aus einer universellen Klasse)
 - gute Wahl der Tabellengrößen:
bei jedem **Rehash** sollte die **Tabellengröße** etwa **verdoppelt** werden
alte Grösse $m \Rightarrow$ neue Grösse $\approx 2m$
 - Verdoppeln ergibt immer noch durchschnittlich konstante Zeit pro Hashtabellen-Operation
→ **amortisierte Analyse** (werden wir gleich anschauen...)

Analyse Verdoppelungsstrategie

- Wir machen ein paar vereinfachende Annahmen:
 - Bis zu Load α_0 (z.B. $\alpha_0 = 1/2$) kosten alle Hashtabellen-Operationen $\leq c$
 - Bei Load α_0 wird die Tabellengröße verdoppelt:
Alte Grösse m , neue Grösse $2m$, Kosten $\leq c \cdot m$
 - Am Anfang hat die Tabelle Grösse $m_0 \in O(1)$
 - Die Tabelle wird nie verkleinert...
- Wie gross sind die Kosten für das Rehashing, verglichen mit den Gesamtkosten für alle anderen Operationen?

Gesamtkosten

- Wir nehmen an, dass die Tabellengröße $m = m_0 \cdot 2^k$ für $k \geq 1$ ist
 - d.h., bis jetzt haben wir $k \geq 1$ Rehash-Schritte gemacht
 - Bemerkung: Bei $k = 0$ sind die Rehash-Kosten 0.
- Die Gesamt-Rehash-Kosten sind dann

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} c \cdot m_0 \cdot 2^i = c \cdot m_0 \cdot (2^k - 1) \leq c \cdot m$$

Gesamtkosten

- Wir nehmen an, dass die Tabellengröße $m = m_0 \cdot 2^k$ für $k \geq 1$ ist
 - d.h., bis jetzt haben wir $k \geq 1$ Rehash-Schritte gemacht
 - Bemerkung: Bei $k = 0$ sind die Rehash-Kosten 0.

- Die Gesamt-Rehash-Kosten sind dann

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} c \cdot m_0 \cdot 2^i = c \cdot m_0 \cdot (2^k - 1) \leq c \cdot m$$

- Gesamt-Kosten für die übrigen Operationen

- Beim Rehash von Größe $m/2$ auf m waren $\geq \alpha_0 \cdot m/2$ Einträge in der Tabelle
- Anzahl Hashtabellen-Operationen (ohne Rehash)

$$\geq \frac{\alpha_0}{2} \cdot m$$

- Die Gesamt-Rehash-Kosten sind dann

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} c \cdot m_0 \cdot 2^i = c \cdot m_0 \cdot (2^k - 1) \leq c \cdot m$$

- Anzahl Hashtabellen-Operationen

$$\#OP \geq \frac{\alpha_0}{2} \cdot m$$

- Durchschnittskosten pro Operation

$$\frac{\#OP \cdot c + \text{Rehash_Kosten}}{\#OP} \leq c + \frac{2c}{\alpha_0} \in O(1)$$

- Im Durchschnitt sind die Kosten pro Operation konstant
 - auch für worst-case Eingaben (solange die Annahmen zutreffen)
 - **Durchschnittskosten pro Operation = amortisierte Kosten der Operation**

Algorithmenanalyse bisher:

- worst case, best case, average case

Jetzt zusätzlich **amortized worst case**:

- n Operationen o_1, \dots, o_n auf einer Datenstruktur, t_i : Kosten von o_i
- Kosten können sehr unterschiedlich sein (z.B. $t_i \in [1, c \cdot i]$)
- Amortisierte Kosten pro Operation

$$\frac{T}{n}, \quad \text{wobei } T = \sum_{i=1}^n t_i$$

- **Amortisierte Kosten:** Durchschnittskosten pro Operation bei einer worst-case Ausführung
 - amortized worst case \neq average case!!
- Mehr dazu in der Algorithmentheorie-Vorlesung (und evtl. später)

- Falls man immer nur vergrößert und davon ausgeht, dass bei kleinem Load, Hashtabellenop. $O(1)$ Kosten haben, sind die amortisierten Kosten pro Operation $O(1)$.
- Analyse funktioniert auch bei zufälliger Hashfunktion aus universeller Familie (mit hoher Wahrscheinlichkeit)
 - dann haben Hashtabellen-Op. bei kleinem Load mit hoher Wahrscheinlichkeit amortisierte Kosten $O(1)$
- Die Analyse lässt sich auch auf Rehashs zum Verkleinern erweitern
- In einer ähnlichen Art kann man aus fixed-size Arrays dynamische Arrays bauen
 - Alle Arrayoperationen haben dann $O(1)$ amortisierte Laufzeit
 - Vergrößern/verkleinern erlaubt der ADT nur in 1-Elem.-Schritten am Ende!
 - Werden wir vielleicht noch genauer anschauen...

Hashing Zusammenfassung:

- effiziente Dictionary-Datenstruktur
- Operationen brauchen im Erwartungswert (meistens) $O(1)$ Zeit
- Bei Hashing mit Chaining hat insert immer $O(1)$ Laufzeit
- Können wir auch bei **find $O(1)$ Laufzeit** garantieren?
 - wenn gleichzeitig insert nur noch im Erwartungswert $O(1)$ ist...

Cuckoo Hashing Idee:

- Offene Adressierung
 - an jeder Position der Tabelle hat es nur für ein Element Platz
- Zwei Hashfunktionen h_1 und h_2
- Ein Schlüssel x wird immer bei $h_1(x)$ oder $h_2(x)$ gespeichert
 - Falls beim Einfügen beide Stellen schon besetzt sind, müssen wir umorganisieren...

Einfügen eines Schlüssels x :

- x wird immer an der Stelle $h_1(x)$ eingefügt
- Falls schon ein anderer Schlüssel y an der Stelle $h_1(x)$ ist:
 - Werfe y da raus (daher der Name: Cuckoo Hashing)
 - y muss an seiner alternativen Stelle eingefügt werden (falls es bei $h_1(y)$ war, an Stelle $h_2(y)$, sonst an Stelle $h_1(y)$)
 - falls da auch schon ein Element z ist, werfe z raus und platziere es an seiner Alternativposition
 - und so weiter...

Find / Delete:

- Falls x in der Tabelle ist, ist's an Stelle $h_1(x)$ oder $h_2(x)$
- bei Delete: Markiere Zelle als leer!
- beide Operationen immer $O(1)$ Zeit!

Cuckoo Hashing Beispiel

Tabellengröße $m = 5$

Hashfunktionen $h_1(x) = x \bmod 5$, $h_2(x) = 2x - 1 \bmod 5$

Füge Schlüssel 17, 28, 7, 10, 20 ein:

- Beim Einfügen kann es zu einem Zyklus kommen
 - x wirft y_1 raus
 - y_1 wirft y_2 raus
 - y_2 wirft y_3 raus
 - ...
 - $y_{\ell-1}$ wirft y_ℓ raus
 - y_ℓ wirft x raus
- Dann wird noch der alternative Platz für x ausprobiert, aber da kann das Gleiche auch wieder passieren...
- Tritt insbesondere auf, falls $h_1(y_i) = h_2(y_i)$
- In dem Fall wählt man neue Hash-Funktionen und macht einen Rehash (normalerweise mit grösserer Tabelle)

Wie wählt man die zwei Hashfunktionen?

- Sie sollten möglichst “unabhängig” sein...
- Wenige Schlüssel x , für welche $h_1(x) = h_2(x)$
- Eine gute Möglichkeit:

Zwei unabhängige, zufällige Funktionen einer universellen Menge

- Dann kann man zeigen, dass Zyklen nur sehr selten vorkommen, solange $n \leq m/2$
- Sobald die Tabelle halbvoll ist ($n \geq m/2$) sollte man daher einen Rehash machen und zu einer doppelt so grossen Tabelle wechseln

Find / Delete:

- Hat immer Laufzeit $O(1)$
- Man muss nur die zwei Stellen $h_1(x)$ und $h_2(x)$ anschauen
- Das ist der grosse Vorteil von Cuckoo Hashing

Insert:

- Man kann zeigen, dass das **im Durchschnitt** auch Zeit $O(1)$ braucht
- Falls man die Tabelle nicht mehr als zur Hälfte füllt
- Verdoppeln der Tabellengrösse bei Rehash ergibt konstante durchschnittliche Laufzeit für alle Operationen!

Hashtabellen (Dictionary):

<https://docs.python.org/2/library/stdtypes.html#mapping-types-dict>

- neue Tabelle generieren: `table = {}`
- $(key, value)$ -Paar einfügen: `table.update({key : value})`
- Suchen nach *key*:
`key in table`
`table.get(key)`
`table.get(key, default_value)`
- Löschen von *key*:
`del table[key]`
`table.pop(key, default_value)`

Java-Klasse HashMap:

- Neue Hashtab. erzeugen (Schlüssel vom Typ K , Werte vom Typ V)
`HashMap<K,V> table = new HashMap<K,V>();`
- Einfügen von $(key,value)$ -Paar (key vom Typ K , $value$ vom Typ V)
`table.put(key, value)`
- Suchen nach key
`table.get(key)`
`table.containsKey(key)`
- Löschen von key
`table.remove(key)`
- Ähnliche Klasse HashSet: verwaltet nur Menge von Schlüssel

Es gibt nicht eine Standard-Klasse

hash_map:

- Sollte bei fast allen C++-Compilern vorhanden sein

http://www.sgi.com/tech/stl/hash_map.html

unordered_map:

- Seit C++11 in Standard STL

http://www.cplusplus.com/reference/unordered_map/unordered_map/

C++-Klassen `hash_map` / `unordered_map`:

- Neue Hashtab. erzeugen (Schlüssel vom Typ K , Werte vom Typ V)
`unordered_map<K,V> table;`
- Einfügen von $(key,value)$ -Paar (key vom Typ K , $value$ vom Typ V)
`table.insert(key, value)`
- Suchen nach key
`table[key]` oder `table.at(key)`
`table.count(key) > 0`
- Löschen von key
`table.erase(key)`

Achtung

- Man kann eine `hash_map` / `unordered_map` in C++ wie ein Array benutzen
 - *die Array-Elemente sind die Schlüssel*

- Aber:

`T[key]` fügt den Schlüssel *key* ein, falls er noch nicht drin ist

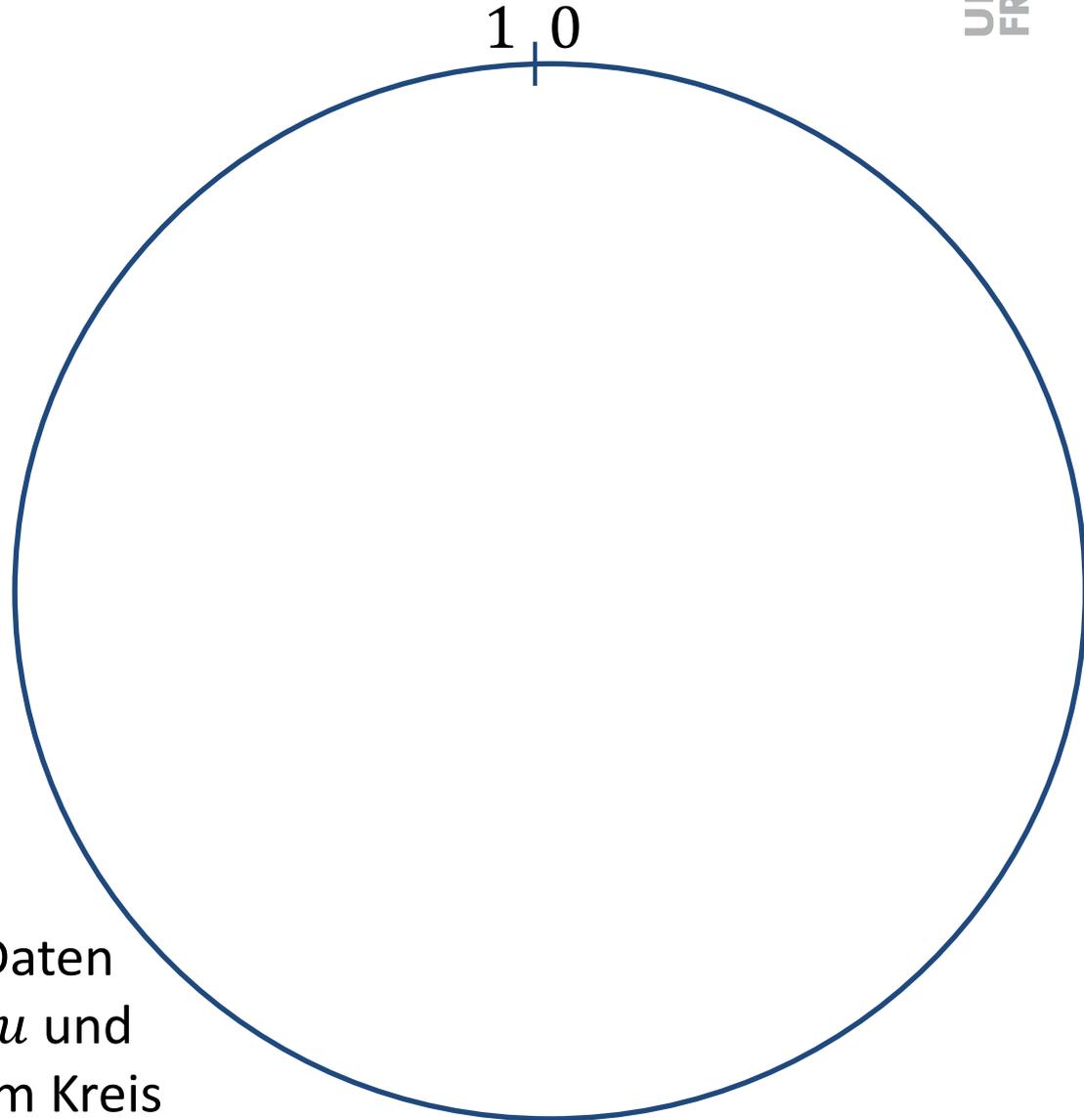
`T.at(key)` wirft eine Exception falls *key* nicht in der Map ist

Ziel: Ein verteilter Dictionary

- Verwalte *(key, value)-Paare* in einem **Netzwerk**
 - z.B. auf vielen Rechnern im Internet
- Jeder Rechner soll einen Teil der Daten speichern
- Daten sollen schnell zugreifbar sein (übl. Dictionary-Operationen)
- Da die Anzahl Rechner gross sein kann, soll jeder Rechner im Netzwerk nur wenige andere “kennen” müssen...
 - Eine Tabelle mit allen Rechnern ist nicht machbar
 - Einen zentralen Server mit allen Informationen wollen wir auch nicht...
- Typische Anwendung: **Peer-to-Peer Netzwerke**
- Wir schauen uns eine von vielen ähnlichen Lösungen an...
 - im Wesentlichen Chord...

Hashfunktion:

- **$h: S \rightarrow [0, 1]$**
 - verstehe Intervall $[0,1]$ als Einheitskreis
- Jeder Schlüssel wird auf den Einheitskreis gemappt
- Jeder Knoten u wählt einen **zufälligen** Wert **$\ell_u \in [0, 1]$** (einen zufälligen Pkt. auf dem Einheitskreis)
- Ein Knoten u speichert die Daten zu den Schlüsseln zwischen u und seinem Nachfolger v auf dem Kreis



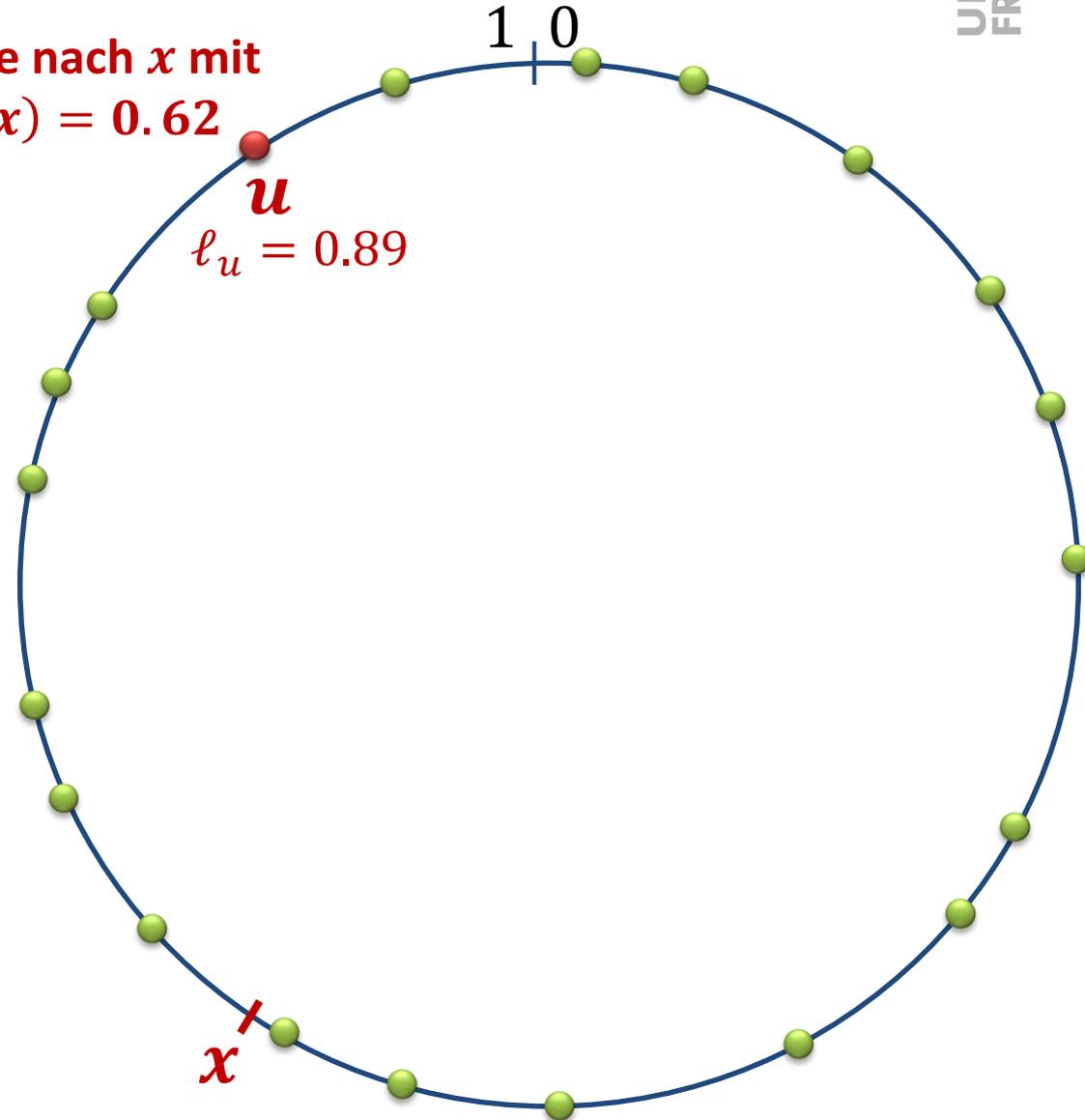
Suchen nach einem Schlüssel

Idee:

- Suche ist einfach, falls u eine Tabelle mit den Adressen und Bereichen von allen Knoten zur Verfügung hat
- u will aber nur wenige Adressen von anderen Knoten verwalten

suche nach x mit
 $h(x) = 0.62$

u
 $l_u = 0.89$



Suchen nach einem Schlüssel

Idee:

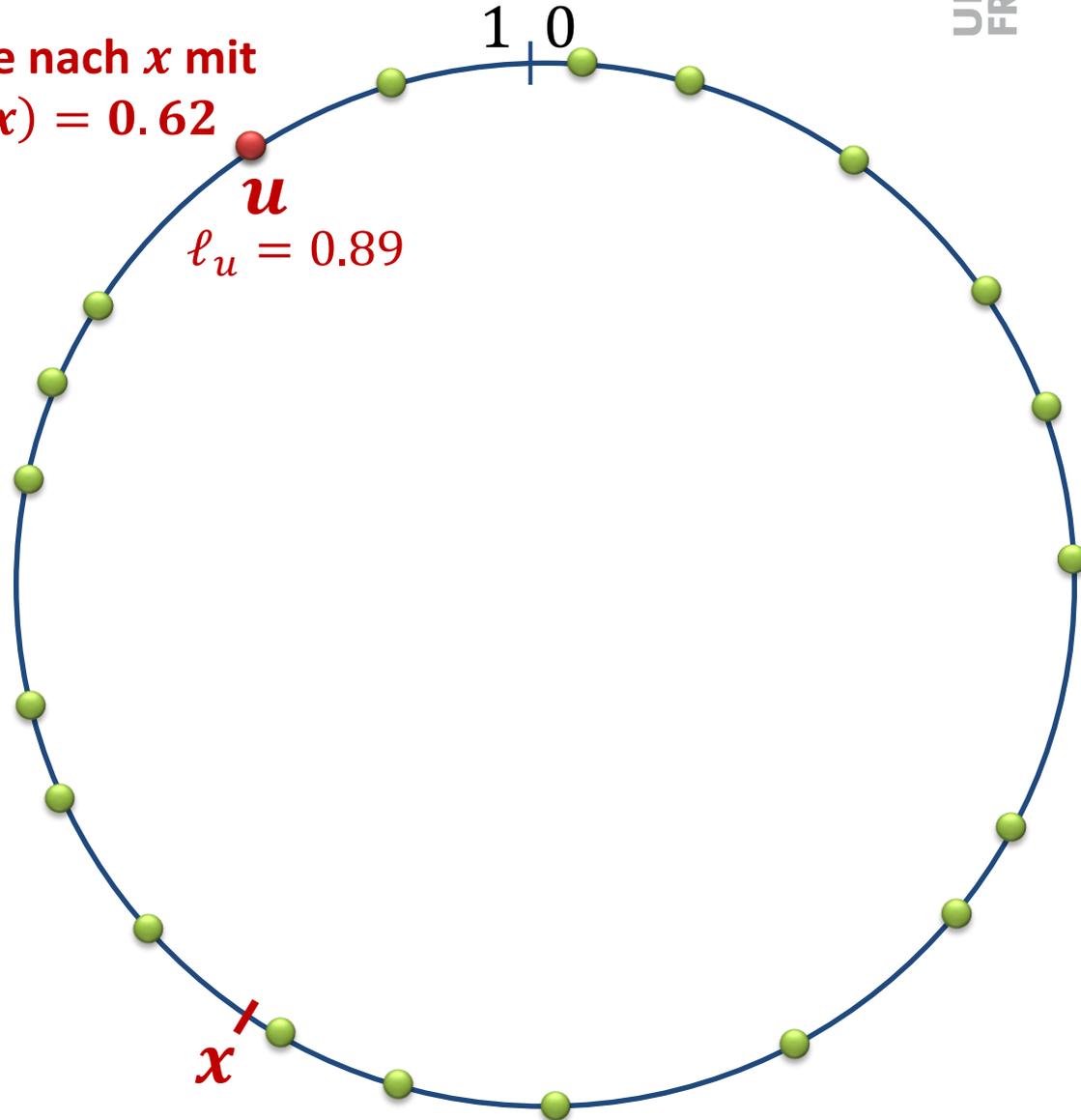
- benutze binäre Suche!

suche nach x mit

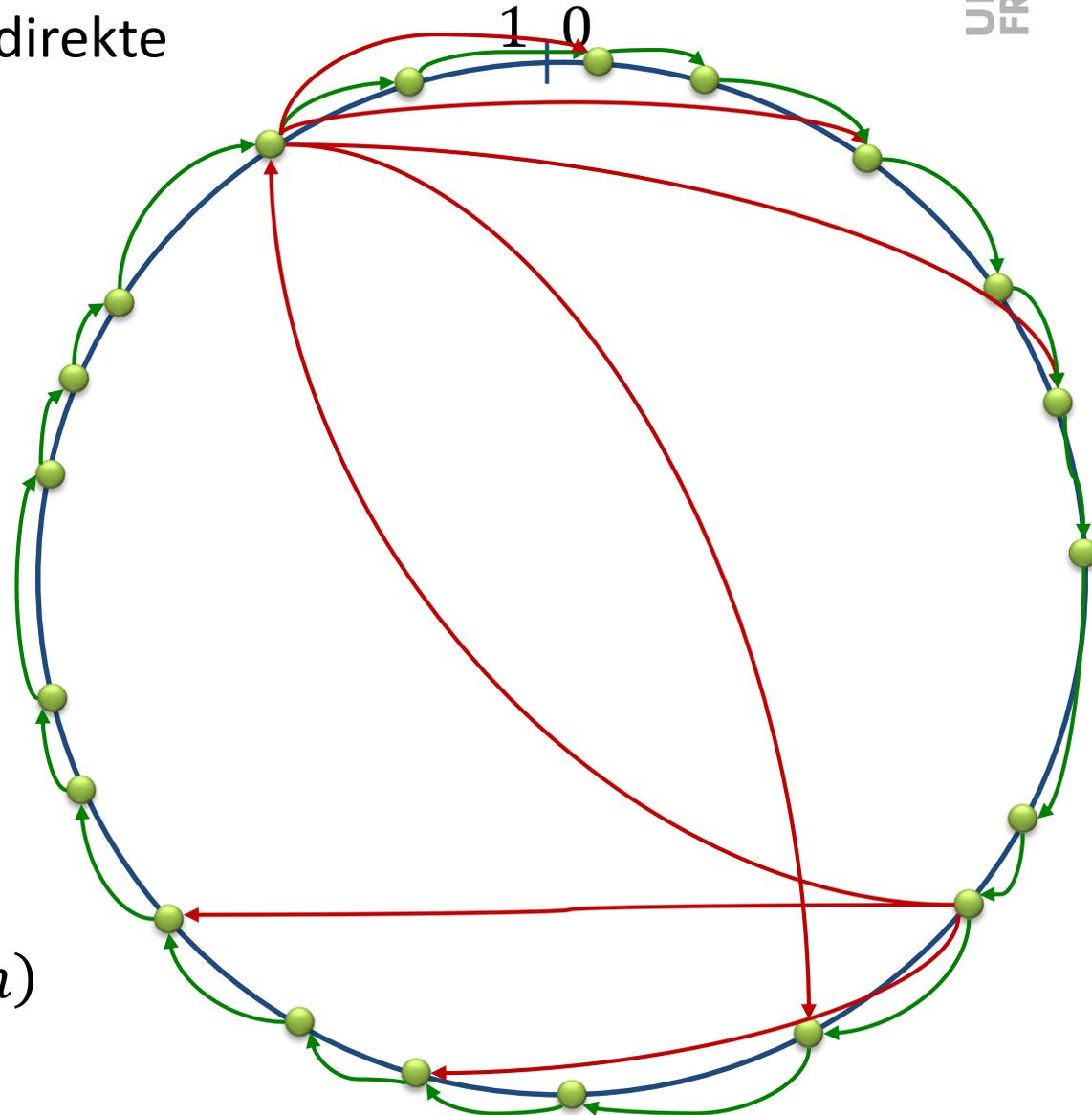
$$h(x) = 0.62$$

u

$$l_u = 0.89$$

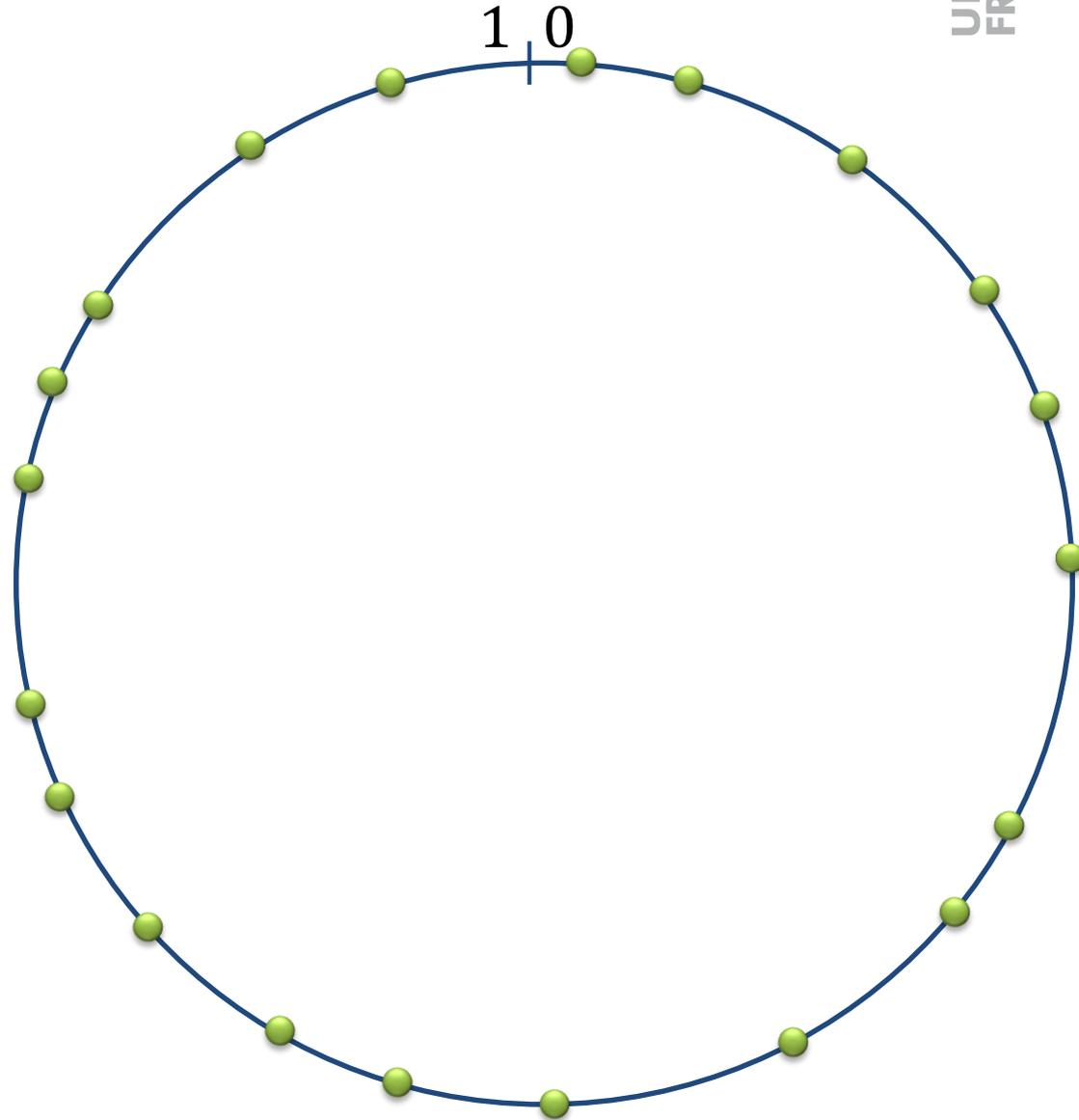


- Jeder Knoten u hat eine direkte Verbindung zu den direkten Nachfolgern
- Und zu den Nachfolgerknoten der Werte $\ell_u + 2^{-i}$ ($i = 1, \dots, \log n$)
– n : Anz. Knoten
- Jeder Knoten hat direkte Verbindungen zu $O(\log n)$ anderen Knoten



Man kann in dem Netzwerk
in $O(\log n)$ Zeit suchen:

- Zeit = #besuchte Knoten
- Man kann in jedem Schritt im Wesentlichen in die Mitte zwischen der aktuellen Position und dem Schlüssel x springen!



- Man geht davon aus, dass prinzipiell jeder mit jedem kommunizieren kann
 - Ist im Internet der Fall, IP-Adresse genügt, um Nachricht zu schicken
- Der durch die direkten Verbindungen induzierte Graph heisst auch **Overlay Netzwerk**
- Im Overlay Netzwerk hat jeder $O(\log n)$ Nachbarn
- Man kann den Algorithmus so implementieren, dass alle wichtigen Operationen $O(\log n)$ Laufzeit haben
 - Einfügen / löschen / suchen eines Schlüssels
(Operation wird jeweils von irgend einem Knoten ausgeführt)
 - Einfügen / löschen eines Knotens

Dictionary:

Zusätzliche mögliche Operationen:

- *D.minimum()* : gibt kleinsten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.maximum()* : gibt grössten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.successor(key)* : gibt nächstgrösseren *key* zurück
- *D.predecessor(key)* : gibt nächstkleineren *key* zurück
- *D.getRange(k1, k2)* : gibt alle Einträge mit Schlüsseln im Intervall $[k1, k2]$ zurück

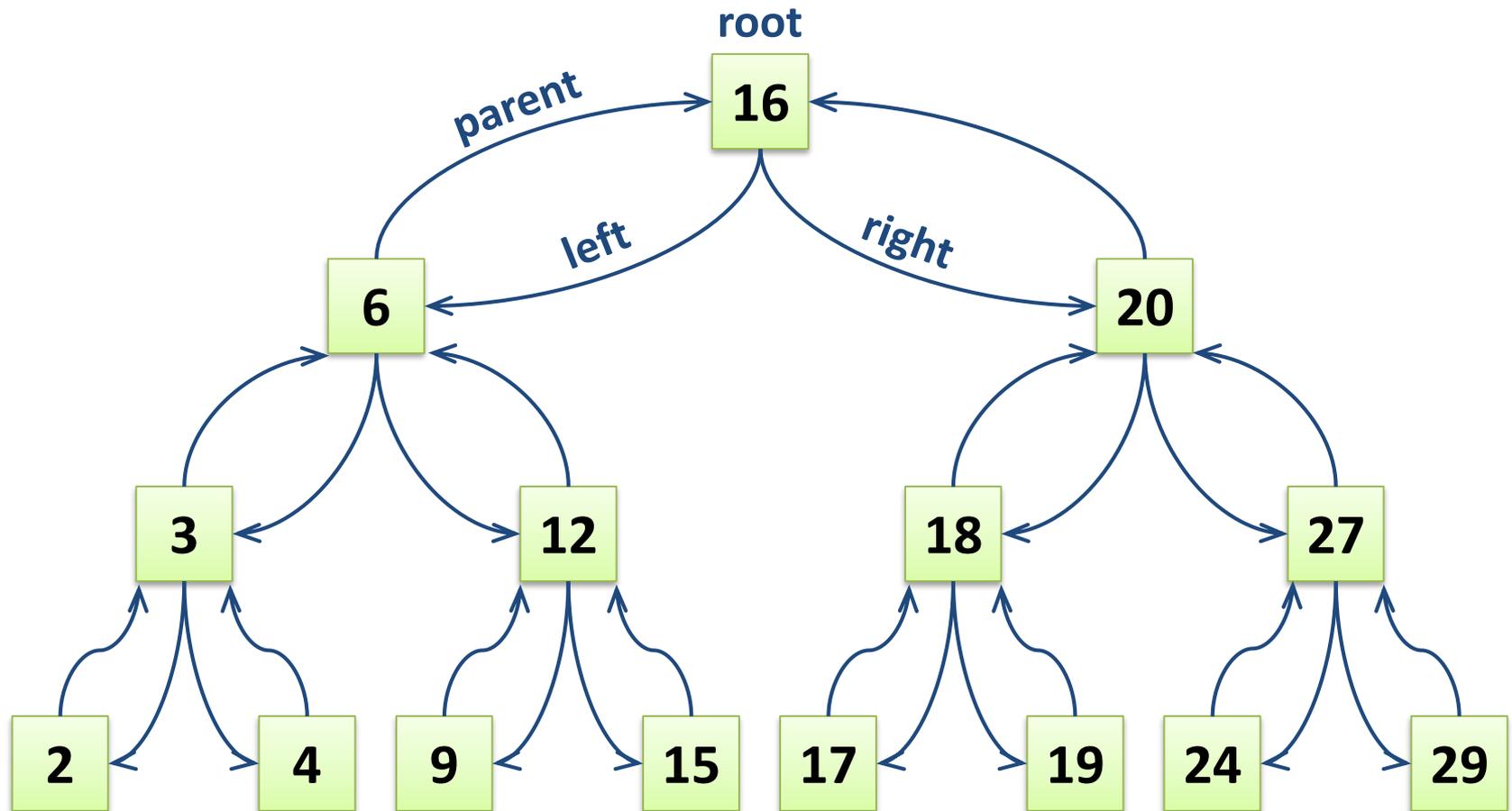
Binäre Suche Revisited...

- Binäre Suche nach x in einem sortierten Array...



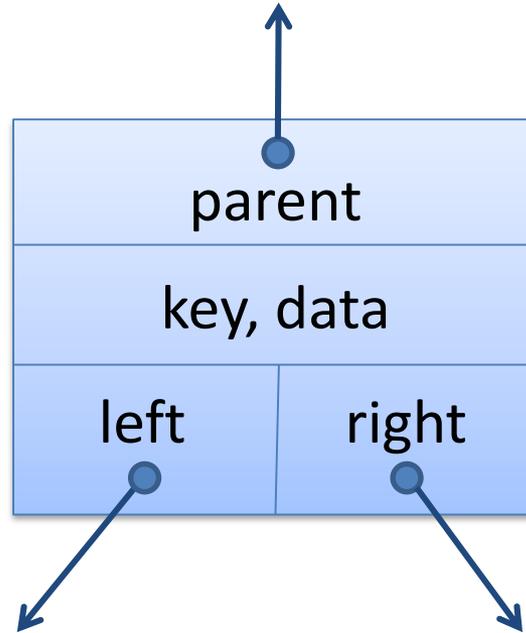
Binäre Suchbäume

- Benutze den Suchbaum der binären Suche als Datenstruktur



Binärer Suchbaum : Elemente

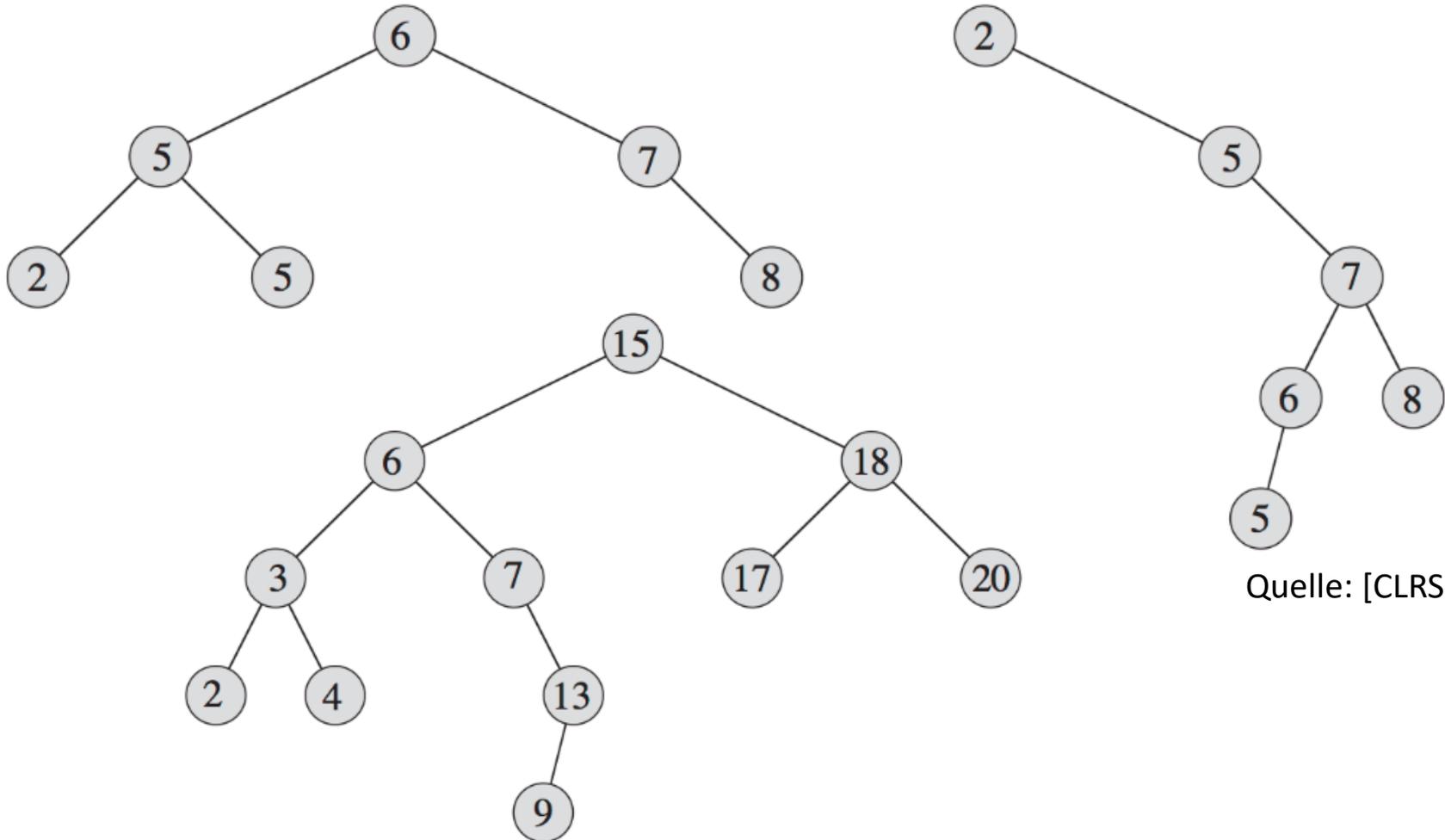
TreeElement:



Implementierung: gleich wie bei den Listen-Elementen

Binäre Suchbäume

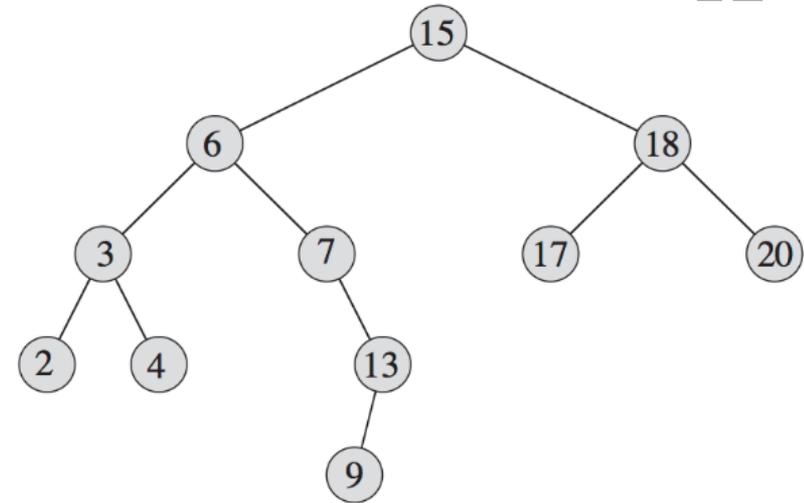
- Binäre Suchbäume müssen nicht immer so schön symmetrisch sein...



Quelle: [CLRS]

Suche nach Schlüssel x

- Benutze binäre Suche
(darum heißt's binärer Suchbaum...)



`current = root`

while `current is not None` and `current.key != x`:

if `current.key > x`:

`current = current.left`

else:

`current = current.right`

Suche in einem binären Suchbaum

Laufzeit der Suche in einem binären Suchbaum

