Informatik II - SS 2018

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 19 (27.6.2018)

Dynamische Programmierung III

UNI FREIBURG

Termin Klausur: 3.9.

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Dynamische Programmierung

UNI FREIBURG

DP $\approx$ Rekursion + Memoization

Memoize: *Speichere* Lösungen zu *Teilproblemen*, verwende die gespeicherten Lösungen, falls das gleicht Teilproblem wieder auftaucht.

- Bei den Fibonacci-Zahlen sind die Teilprobleme $F_1, F_2, F_3, \ldots$

Laufzeit = #Teilprobleme · Zeit pro Teilproblem

Editierdistanz

Given: Two strings $A = a_1 a_2 \dots a_m$ and $B = b_1 b_2 \dots b_n$

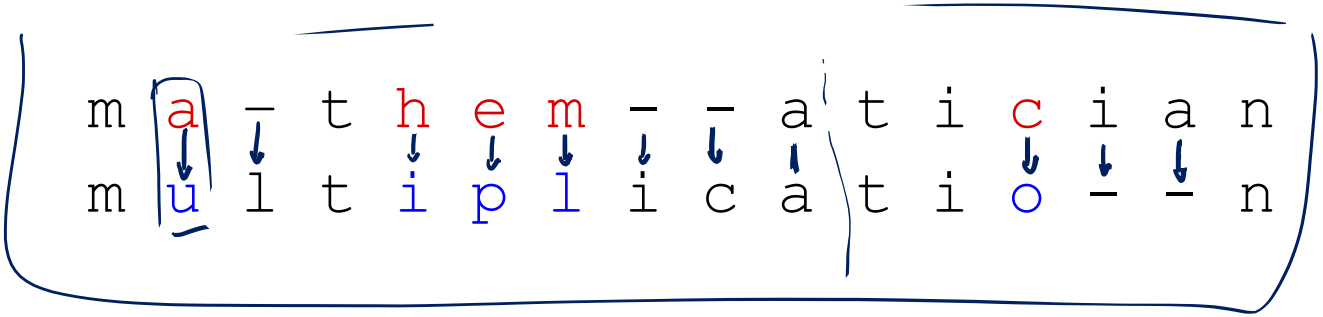
Goal: Determine the minimum number $D(A, B)$ of edit operations required to transform A into B

Edit operations:

a) **Replace** a character from string A by a character from B

b) **Delete** a character from string A

c) **Insert** a character from string B into A



Editierdistanz - Kostenmodell

- Cost for **replacing** character a by b: $\boldsymbol{c(a,b) \geq 0}$

- Capture insert, delete by allowing $a = \varepsilon$ or $b = \varepsilon$:
  - Cost for **deleting** character a: $\boldsymbol{c(a,\varepsilon)}$
  - Cost for **inserting** character b: $\boldsymbol{c(\varepsilon,b)}$

- **Triangle inequality**:

$$c(a,c) \leq c(a,b) + c(b,c)$$

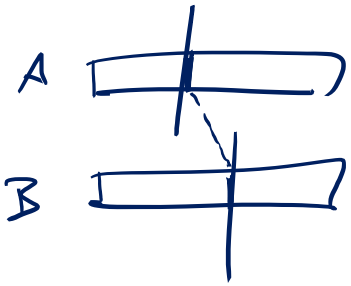
→ each character is changed at most once!

- **Unit cost model**: $c(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } a \neq b \\ 0, & \text{if } a = b \end{cases}$

Rekursive Struktur

- Optimal "alignment" of strings (unit cost model)

  `bbcadfagikccm` and `abbagflrgikacc`:




```
- b b c a g f | a - g i k - c c m
a b b - a d f | l r g i k a c c -
```

opt. Alignment

opt opt

- Consists of optimal "alignments" of sub-strings, e.g.:

```
-bbcagfa      -gik-ccm
abb-adfl      rgikacc-
```

A_{ij}

- Edit distance between $A_{1,m} = a_1 \dots a_m$ and $B_{1,n} = b_1 \dots b_n$:

$$D(A,B) = \min_{k,\ell}\{D(A_{1,k}, B_{1,\ell}) + D(A_{k+1,m}, B_{\ell+1,n})\}$$

#Teilprobleme : $m^2 \cdot n^2$

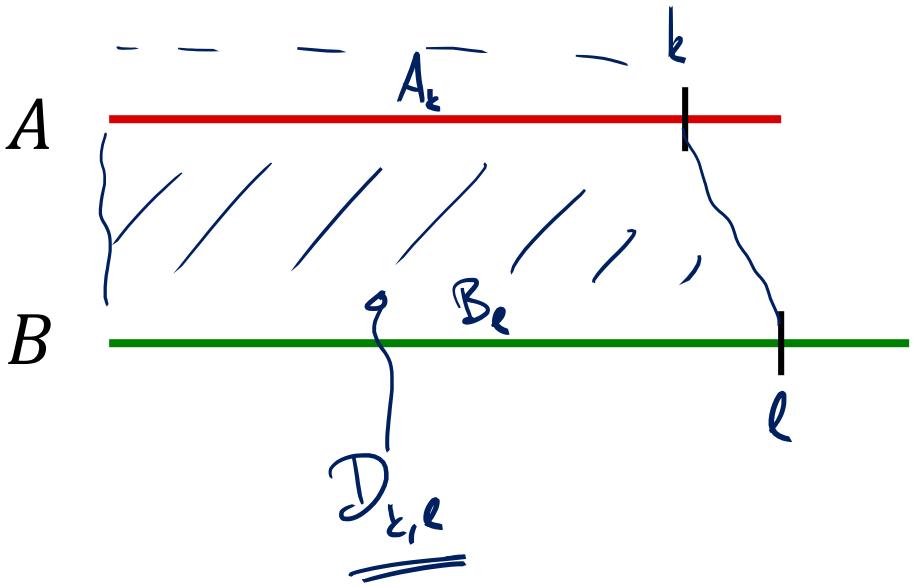
Kosten pro Teilpr.: $m \cdot n$

Berechnen der Editierdistanz

$A_{i,j}$ $A_{1,j} = A_j$

Let $A_k := a_1 \dots a_k$, $B_\ell := b_1 \dots b_\ell$, and

$$D_{k,\ell} := D(A_k, B_\ell)$$



Wie kann man $D_{k,\ell}$ rek. formulieren?

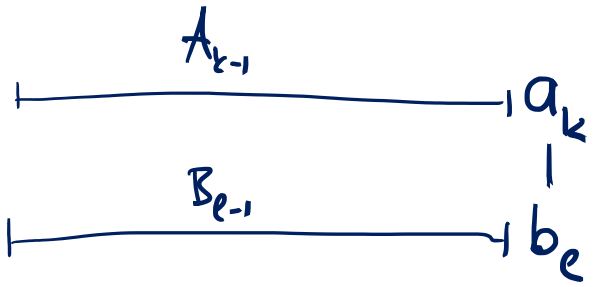
$D_{m,n} = D(A,B)$

Berechnen der Editierdistanz

Three ways of ending an "alignment" between A_k and B_ℓ:

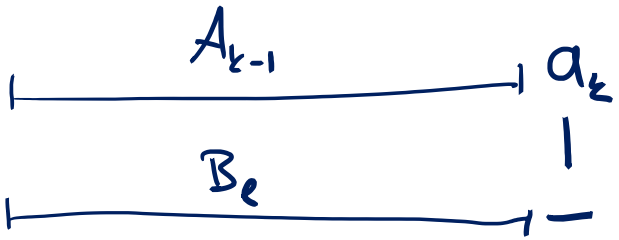
1. a_k is replaced by b_ℓ:

$$D_{k,\ell} = D_{k-1,\ell-1} + c(a_k, b_\ell)$$



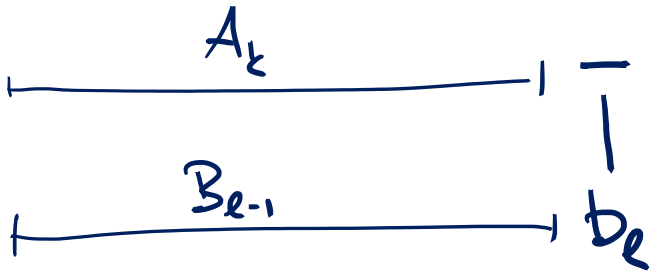
2. a_k is deleted:

$$D_{k,\ell} = D_{k-1,\ell} + c(a_k, \varepsilon)$$



3. b_ℓ is inserted:

$$D_{k,\ell} = D_{k,\ell-1} + c(\varepsilon, b_\ell)$$



Berechnen der Editierdistanz

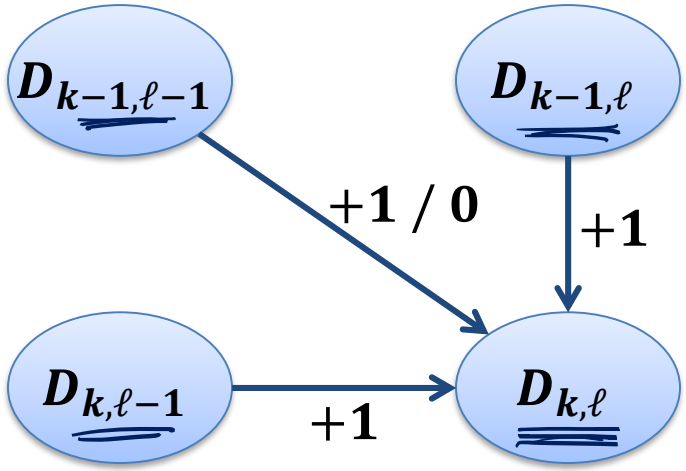
- Recurrence relation (for $k, \ell \geq 1$)

$$D_{k,\ell} = \min \begin{Bmatrix} D_{k-1,\ell-1} + c(a_k, b_\ell) \\ D_{k-1,\ell} + c(a_k, \varepsilon) \\ D_{k,\ell-1} + c(\varepsilon, b_\ell) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} D_{k-1,\ell-1} + 1 \,/\, 0 \\ D_{k-1,\ell} + 1 \\ D_{k,\ell-1} + 1 \end{Bmatrix}$$

falls $a_k \neq b_\ell$ — falls $a_k = b_\ell$

unit cost model

- Need to compute $D_{i,j}$ for all $0 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq \ell$:



Rekursionsgleichung Editierdistanz

Base cases:

$$D_{0,0} = D(\varepsilon, \varepsilon) = 0$$
$$D_{0,j} = D(\varepsilon, B_j) = D_{0,j-1} + c(\varepsilon, b_j)$$
$$D_{i,0} = D(A_i, \varepsilon) = D_{i-1,0} + c(a_i, \varepsilon)$$

Unit cost:

$D_{0,0} = 0$

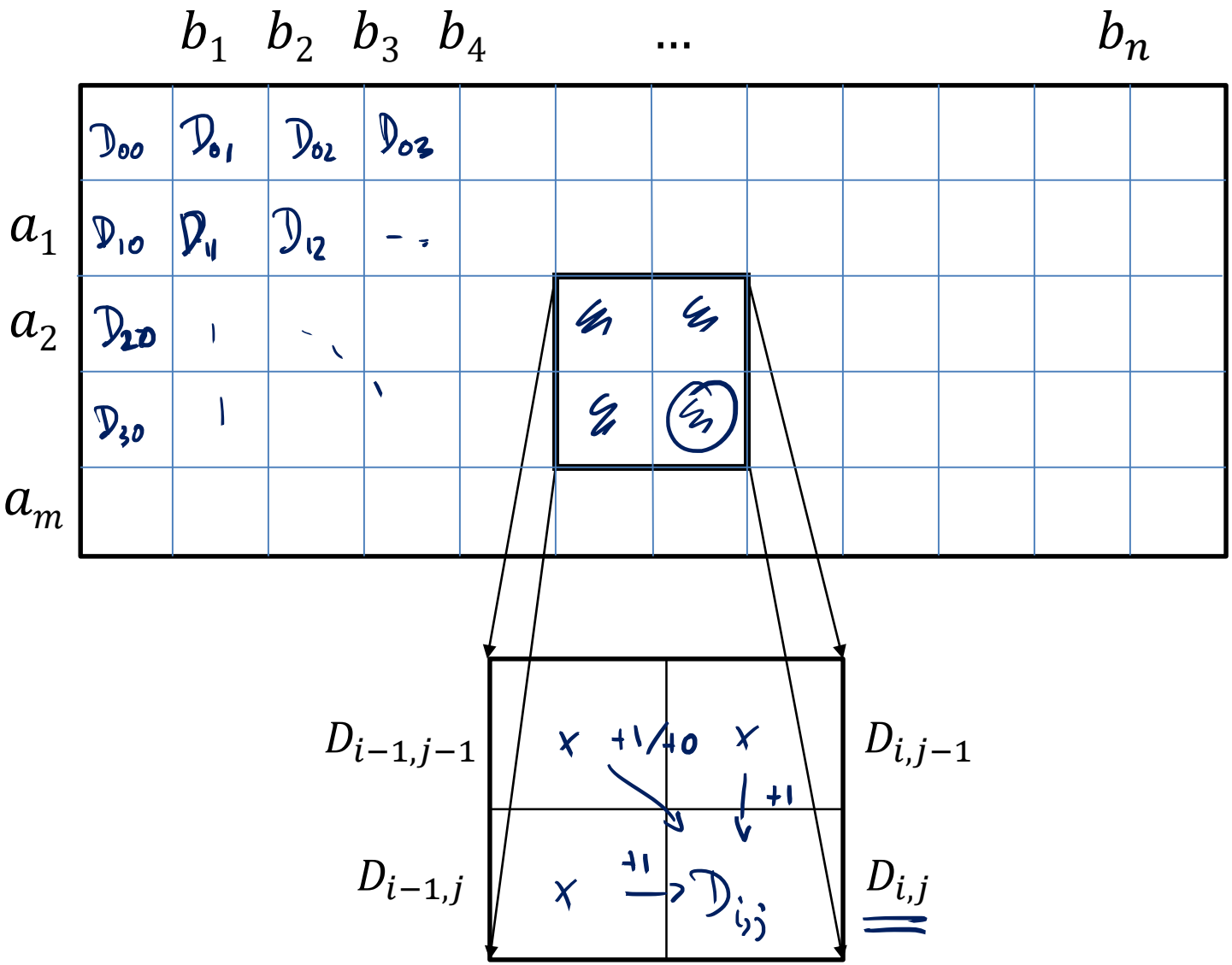
$D_{0,j} = j$

$D_{i,0} = i$

Recurrence relation:

$$D_{k,\ell} = \min \begin{Bmatrix} D_{k-1,\ell-1} + c(a_k, b_\ell) \\ D_{k-1,\ell} + c(a_k, \varepsilon) \\ D_{k,\ell-1} + c(\varepsilon, b_\ell) \end{Bmatrix}$$

Reihenfolge der Teilprobleme



Pseudocode

Algorithm *Edit-Distance*

Input: 2 strings $A = a_1 \dots a_m$ and $B = b_1 \dots b_n$

Output: matrix $D = (D_{ij})$

1 $D[0,0] := 0;$

2 **for** $i := 1$ **to** m **do** $D[i,0] := i;$

3 **for** $j := 1$ **to** n **do** $D[0,j] := j;$

4 **for** $i := 1$ **to** m **do** gehe durch alle Zeilen

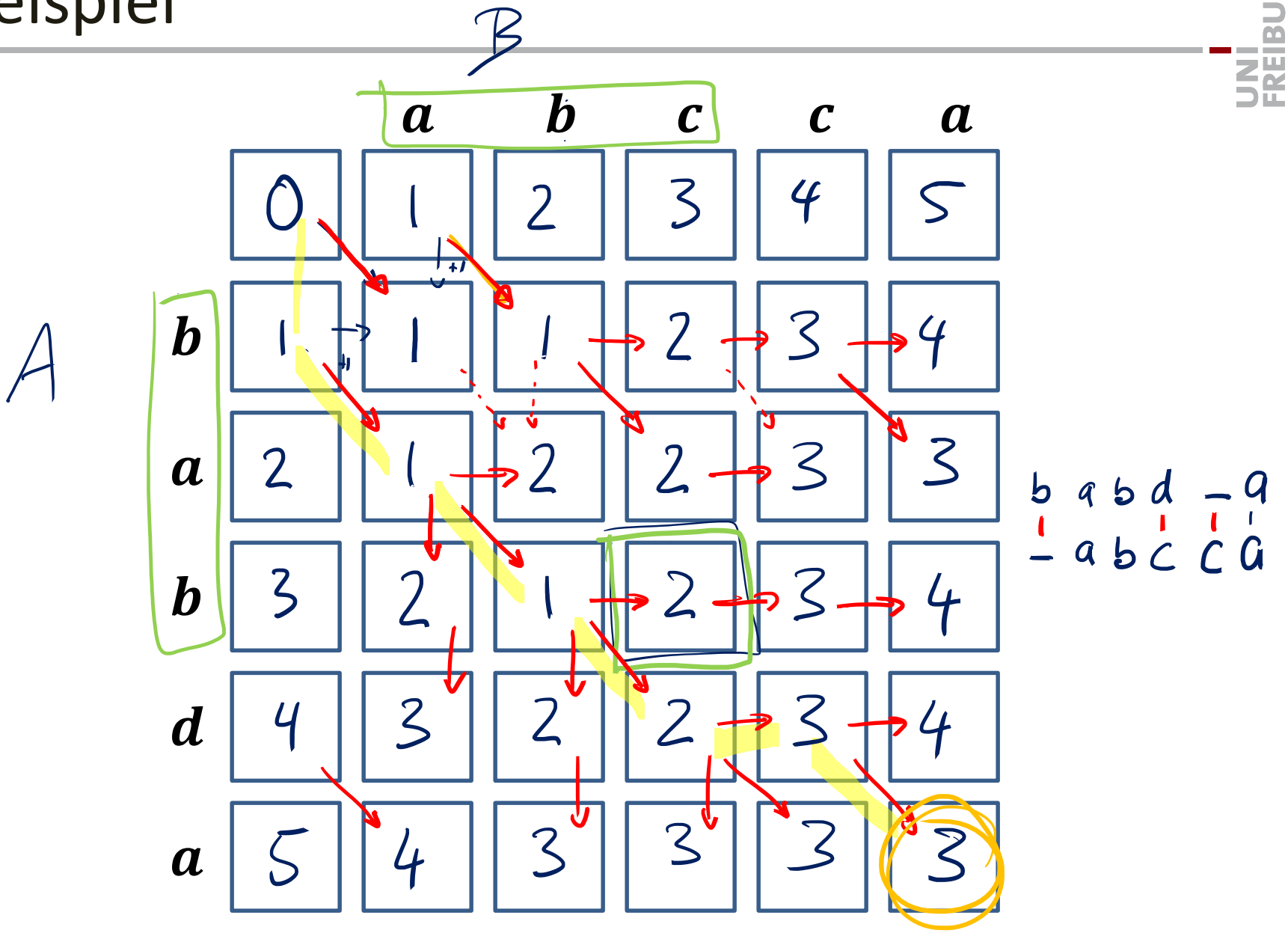
5 **for** $j := 1$ **to** n **do** gehe durch alle Spalten

6 $$D[i,j] := \min \begin{Bmatrix} D[i-1,j] & +1 \\ D[i,j-1] & +1 \\ D[i-1,j-1] & + c(a_i, b_j) \end{Bmatrix};$$

$= 1$ falls $a_i \neq b_j$;

$= 0$ falls $a_i = b_j$;

Beispiel


B
a b c c a
A
0 1 2 3 4 5
b 1 1 1 2 3 4
a 2 1 2 2 3 3
b 3 2 1 2 3 4
d 4 3 2 2 3 4
a 5 4 3 3 3 3
b a b d – a
– a b c c a

Editieroperationen

		a	b	c	c	a
	0	1	2	3	4	5
b	1	1	1	2	3	4
a	2	1	2	2	3	3
b	3	2	1	2	3	4
d	4	3	2	2	3	4
a	5	4	3	3	3	3

Editieroperationen – Pseudocode

Algorithm *Edit-Operations*(i, j)
Input: matrix D (already computed)
Output: list of edit operations

1 **if** $i = 0$ **and** $j = 0$ **then return** empty list

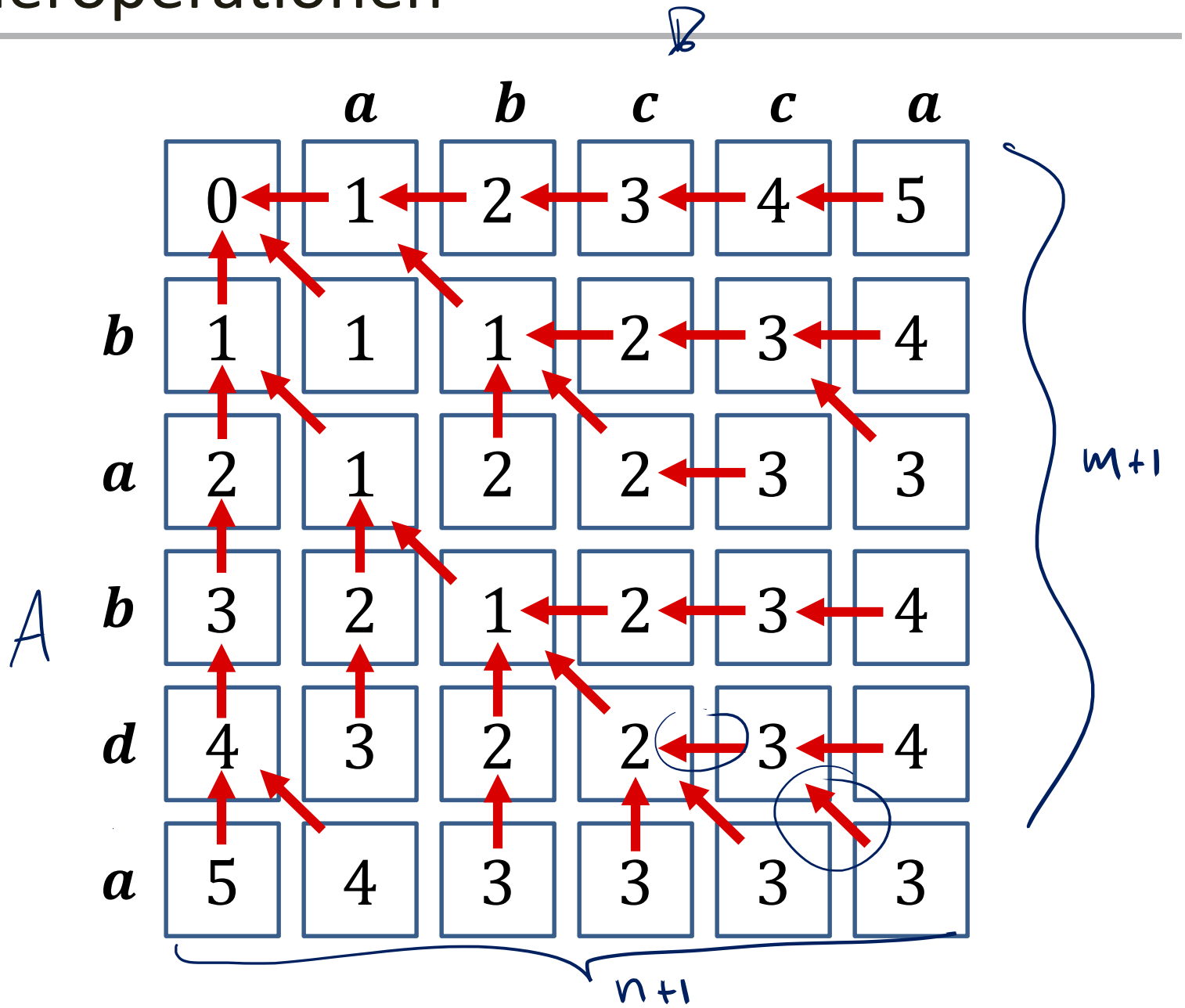
2 **if** $i \neq 0$ **and** $D[i,j] = D[i-1,j] + 1$ **then**
3 **return** *Edit-Operations*$(i-1, j)$ ∘ „delete a_i“

4 **else if** $j \neq 0$ **and** $D[i,j] = D[i,j-1] + 1$ **then**
5 **return** *Edit-Operations*$(i, j-1)$ ∘ „insert b_j“

6 **else** // $D[i,j] = D[i-1,j-1] + c(a_i, b_j)$
7 **if** $a_i = b_i$ **then return** *Edit-Operations*$(i-1, j-1)$
8 **else return** *Edit-Operations*$(i-1, j-1)$ ∘ „replace a_i by b_j“

Initial call: *Edit-Operations*(*m*,*n*)

Editieroperationen



Editierdistanz – Zusammenfassung

- Edit distance between two strings of length m and n can be computed in $O(mn)$ time.

- Obtain the edit operations:
  - for each cell, store which rule(s) apply to fill the cell
  - track path backwards from cell (m, n)
  - can also be used to get all optimal "alignments"

- Unit cost model:
  - interesting special case
  - each edit operation costs 1

Editierdistanz schneller berechnen?

- Wie klein können die Lösungen der Teilprobleme sein?

ε	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	≥ 0	≥ 1	≥ 2	≥ 3	≥ 4	≥ 5	≥ 6	≥ 7	≥ 8	
2	≥ 1	≥ 0	≥ 1	≥ 2	≥ 3	≥ 4	≥ 5	≥ 6	≥ 7	
3	≥ 2	≥ 1	≥ 0							
4	≥ 3	≥ 2		≥ 0						
5	≥ 4	≥ 3			≥ 0					
6	≥ 5	≥ 4				≥ 0				
7	≥ 6	≥ 5					≥ 0			
8	≥ 7	≥ 6						≥ 0		
9	≥ 8	≥ 7							≥ 0	

Editierdistanz schneller berechnen?

- Falls wir wissen, dass die Editierdistanz $\leq \delta$ ist? z.B. $\delta = 2$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

$O(\min\{m,n\} \cdot \delta)$

$\leq \delta$

≤ 2 (falls $\delta = 2$)

Editierdistanz schneller berechnen?

Falls wir wissen, dass die Editierdistanz $\leq \delta$ ist:

- Wir benötigen nur die Hauptdiagonale und die δ ersten Nebendiagonalen (auf beide Seiten)
- Das sind $O(\delta \cdot n)$ Einträge (falls beide Strings Länge $\Theta(n)$ haben)

Laufzeit + Speicher: $\boldsymbol{O(\delta \cdot n)}$

- Was tun, falls δ nicht bekannt ist?

1. Wir raten δ und probieren, bis wir ein genug grosses δ gewählt haben (falls wir δ zu klein raten, dann entdecken wir das)

2. Wir versuchen die Tabelle direkt entlang der Diagonale zu füllen und verwenden die bekannten unteren Schranken für die Einträge
   - Werte in den Nebendiagonalen erst berechnen, wenn man sie braucht
   - Immer zuerst die fehlenden Werte berechnen, welche näher bei der Hauptdiagonale liegen

Editierdistanz schneller berechnen?

Den Parameter δ raten?

- Annahme: Editierdistanz $= D$
- Versuche mit Parameter $\delta \geq 1$
  - Algorithmus hat Laufzeit $O(n \cdot \delta)$
  - Falls $D \leq \delta$, dann finden wir die Editierdistanz (und die Edit.-op.)
  - Falls $D > \delta$, dann finden wir das heraus

$\delta = n$

$O(n \cdot \delta) = O(n^2)$

$1 + \dots + D = \frac{D(D+1)}{2}$

Versuch 1, wähle $\delta = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$O(1 \cdot n + 2n + 3 \cdot n + \dots + D \cdot n) = O(n \cdot D^2)$

Versuch 2, wähle $\delta = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$

$O(1 \cdot n + 2 \cdot n + 4 \cdot n + \dots + 2D \cdot n) = O(n \cdot \underbrace{(1 + 2 + 4 + \dots + 2D)}_{\leq 4D}) = O(n \cdot D)$

$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$

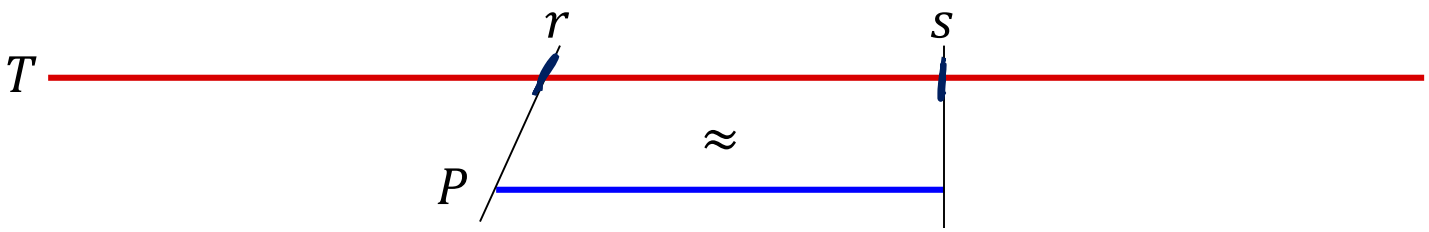
$\underbrace{1 \dots 11}_{k+1}$ $\quad$ $\underbrace{10 \dots 0}_{k+1}$

Approximate String Matching

Given: strings $T = t_1 t_2 \dots t_n$ (text) and $P = p_1 p_2 \dots p_m$ (pattern).

Goal: Find an interval $[r, s]$, $1 \leq r \leq s \leq n$ such that the sub-string $T_{r,s} := t_r \dots t_s$ is the one with highest similarity to the pattern P:

$$\arg\min_{1 \leq r \leq s \leq n} D(T_{r,s}, P)$$



Approximate String Matching

Naive Lösung:

for all $1 \leq r \leq s \leq n$ **do**

compute $D(T_{r,s}, P)$

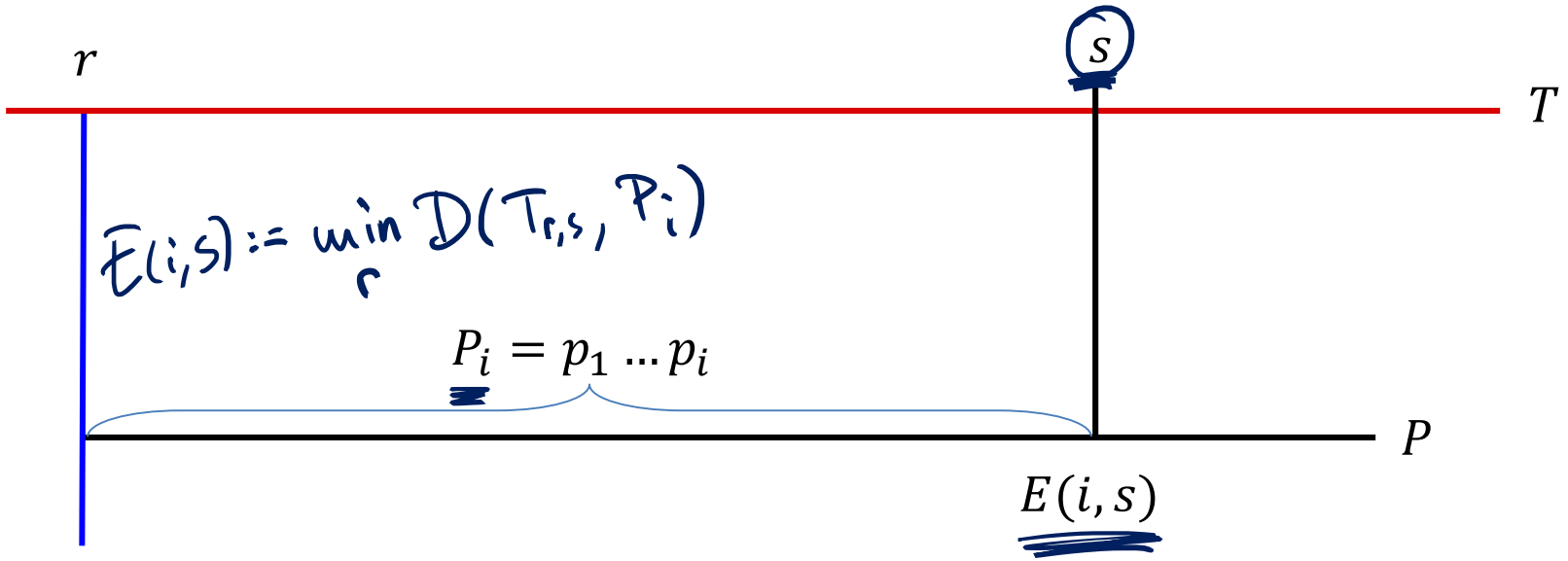
choose the minimum

Laufzeit $O(n^3 \cdot m)$

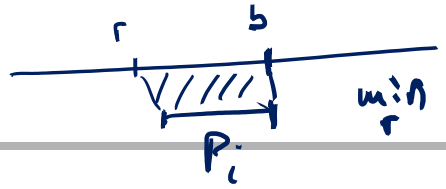
Approximate String Matching

A related problem:

- For each position s in the text and each position i in the pattern compute the minimum edit distance $E(i,s)$ between $P_i = p_1 \dots p_i$ and any substring $T_{r,s}$ of T that ends at position s.



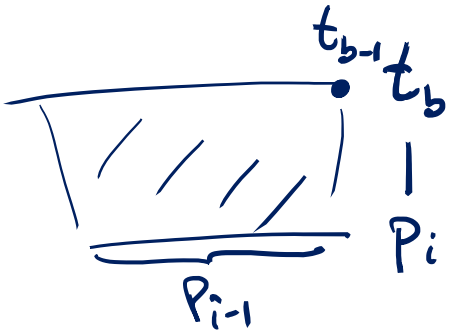
Approximate String Matching



Three ways of ending optimal alignment between T_b and P_i:

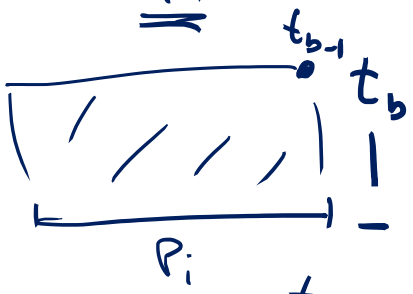
1. t_b is replaced by p_i:

$$E_{b,i} = E_{b-1,i-1} + c(t_b, p_i)$$



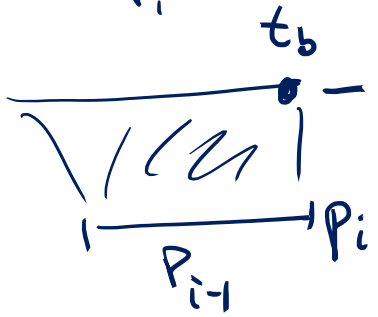
2. t_b is deleted:

$$E_{b,i} = E_{b-1,i} + c(t_b, \varepsilon)$$



3. p_i is inserted:

$$E_{b,i} = E_{b,i-1} + c(\varepsilon, p_i)$$



Approximate String Matching

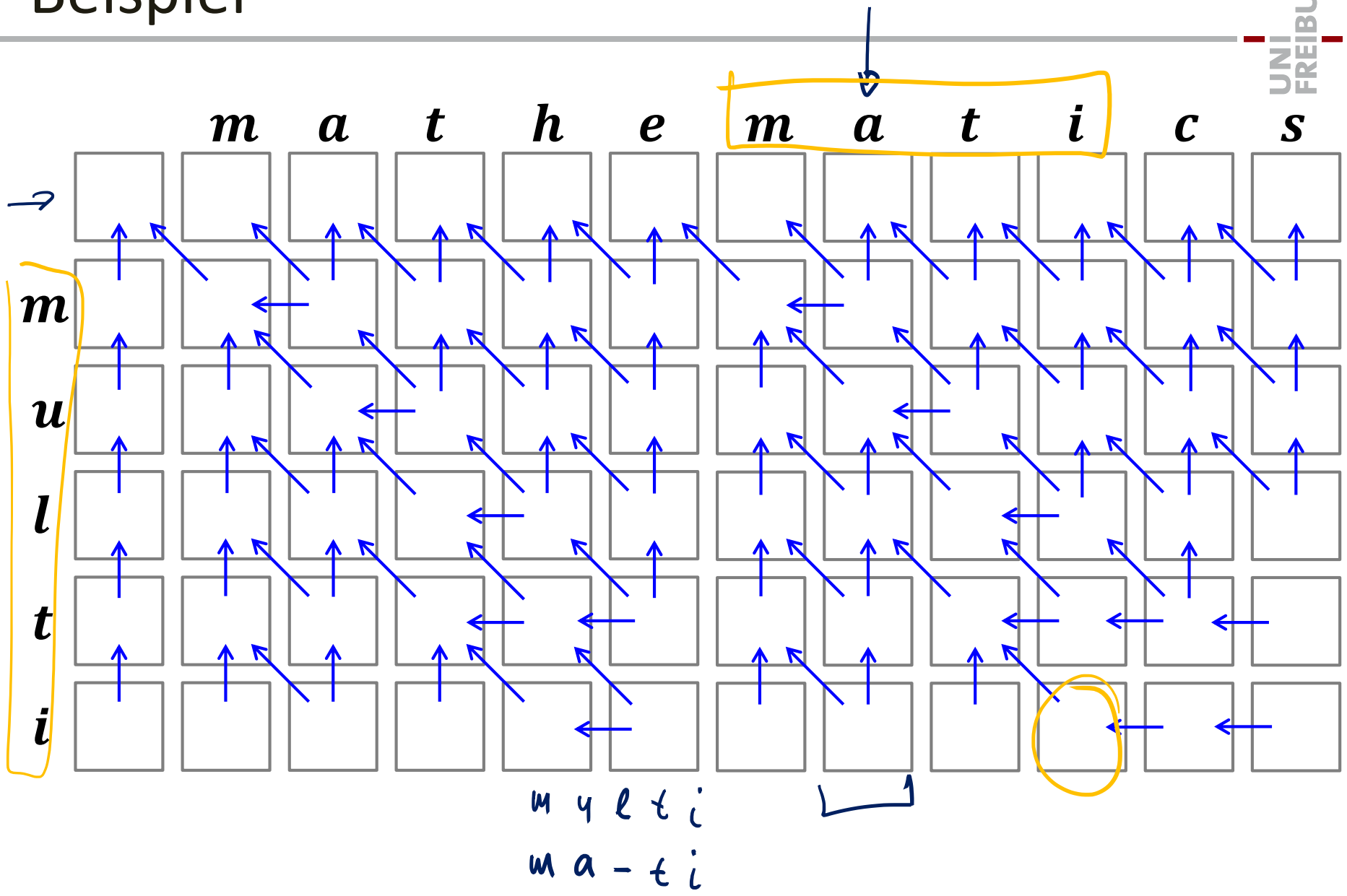
Recurrence relation (unit cost model):

$$E_{b,i} = \min \begin{cases} E_{b-1,i-1} + 1 \\ E_{b-1,i} + 1 \\ E_{b,i-1} + 1 \end{cases}$$

Base cases:

$$E_{0,0} = 0$$
$$E_{0,i} = i$$
$$E_{i,0} = 0$$

Beispiel



Approximate String Matching

- Optimal matching consists of optimal sub-matchings
- Optimal matching can be computed in $O(mn)$ time

m : Länge des Patterns
n : Länge des Textes

- Get matching(s):
  - Start from minimum entry/entries in bottom row
  - Follow path(s) to top row

- Algorithm to compute $E(b, i)$ identical to edit distance algorithm, except for the initialization of $E(b, 0)$

Verwandte Problem in der Bioinformatik

Sequence Alignment:

Find optimal alignment of two given DNA, RNA, or amino acid sequences.

```
G A - C G G A T T A G
G A T C G G A A T - G
```

Global vs. Local Alignment:

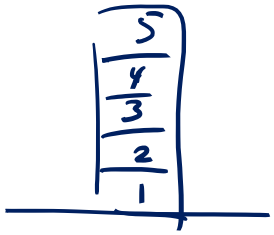
- *Global alignment*: find optimal alignment of 2 sequences
- *Local alignment*: find optimal alignment of sequence 1 (pattern) with sub-sequence of sequence 2 (text)

Eier-Rätsel

Gegeben: Ein Haus mit $n \geq 1$ Stockwerken und $k \geq 1$ Eier

Finde mit möglichst wenigen Versuchen heraus, von welchen Stockwerken ein Ei ganz bleibt, wenn man es fallen lässt.

Wieviele Versuche braucht es im Worst Case für gegebene n und k?



Annahmen:

- Die Stockwerke sind von 1 (EG) bis n nummeriert
- Alle Eier sind gleich
- Falls ein Ei ganz bleibt, dann verhält es sich danach, wie ein Ei, dass noch nie fallen gelassen wurde
- Falls ein Ei denn Fall von Stockwerk s überlebt, dann überlebt es auch den Fall von Stockwerken $s' < s$

Eier-Rätsel

UNI FREIBURG

Gegeben: Ein Haus mit $n \geq 1$ Stockwerken und $k \geq 1$ Eier

Wieviele Versuche braucht es im Worst Case für gegebene n und k?

Einfache Fälle:

- $k = 1$ (es steht nur 1 Ei zur Verfügung)
  - Man muss der Reihe nach die Stockwerke $1, 2, 3, \dots, n$ ausprobieren
- $k = \infty$ (es stehen beliebig viele Eier zur Verfügung)
  - Binäre Suche
- Kennt jemand die Lösung für $k = 2$?
  - Wieviele Versuche braucht es z.B. für 100 Stockwerke mit 2 Eiern?

Eier-Rätsel

Gegeben: Ein Haus mit $n \geq 1$ Stockwerken und $k \geq 1$ Eier

Wieviele Versuche braucht es im Worst Case für gegebene n und k?

Rekursive Formulierung:

- $\text{attempts}(n,k)$: Anzahl Versuche bei n Stockwerken und k Eiern

$$\text{attempts}(n,k) = 1 + \min_{1 \leq s \leq n} \{\max\{\text{attempts}(s-1,k-1), \text{attempts}(n-s,k)\}\}$$

$$\text{attempts}(n,1) = n$$

$$\text{attempts}(0,k) = 0$$

Nächste Woche

UNI FREIBURG

- Ich werde nächste Woche nicht in Freiburg sein. Da wir beim Vorlesungsstoff genug weit sind, wird nächste Woche keine Vorlesung stattfinden.
- Der Montagstermin wird ganz ausfallen
- Am Mittwoch wird im Vorlegunssaal (106-00-036) eine Übungs-, bzw. Fragestunde stattfinden, in der die Assistenten zusätzliche Übungen und/oder eine alte Klausur besprechen.

- Für die aktuelle Übung haben sie 2 Wochen Zeit (Abgabe: 9.7.)
- Danach gibt es noch eine reguläre Übung
- In der letzten Woche wird es noch ein Bonus-Übungsblatt geben
  - damit diejenigen, welche knapp unter 50% sind, noch auf die nötigen Punkte für die Klausurzulassung kommen können