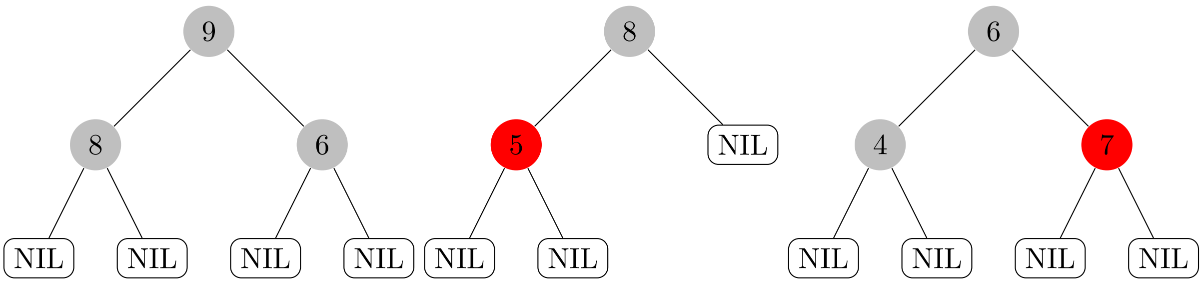
Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
M. Fuchs, G. Schmid

Algorithmen und Datenstrukturen
Sommersemester 2024
Übungsblatt 7

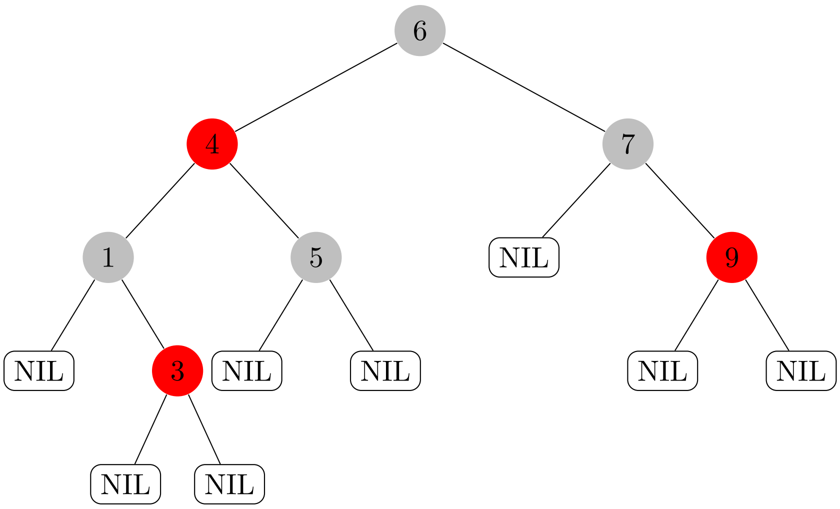
Abgabe: Dienstag, 11. Juni, 2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Rot-Schwarz Bäume *(10 Punkte)*

(a) Entscheiden Sie für jeden der folgenden Bäume, ob es sich um einen Rot-Schwarz Baum handelt und falls nicht, welche Eigenschaft verletzt ist: *(3 Punkte)*



(b) Führen Sie auf folgendem Rot-Schwarz Baum zuerst die Operation `insert`(8) und danach `delete`(5) aus. Zeichnen Sie den resultierenden Baum. Dokumentieren Sie Ihre Zwischenschritte.[1] *(7 Punkte)*



Aufgabe 2: Balancierte Suchbäume *(10 Punkte)*

Sei ein **black-box-tree** ein binärer Suchbaum für den aber ausserdem folgende Zusatzeigenschaft gilt: Für jeden Knoten v unterscheidet sich die Tiefe[2] des rechten und linken Teilbaums um höchstens 1.
Hinweis: Da die Tiefe nicht für leere Teilbäume definiert ist, nutzen wir wie bei Rot-Schwarz Bäumen den Trick einen NIL Knoten an jedes "Blatt" zu hängen. Obige Zusatzeigenschaft muss also nur für die nicht-NIL Knoten gelten.

[1] Wie haben hier einen Beispielcode zum Zeichnen solcher Bäume in LaTeX bereitgestellt.
[2] Die Tiefe ist die Länge des längsten Pfades der Wurzel zu einem Blatt.

(a) Beweisen oder Widerlegen Sie: In einem black-box-tree können Pfade von der Wurzel zu Blättern existieren deren Länge sich um mehr als 1 unterscheidet. *(1 Punkt)*

(b) Beweisen Sie *induktiv*, dass ein black-box-tree der Tiefe $d \geq 0$ bis zur Tiefe $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ voll besetzt ist. Wir nehmen hier an dass ein Baum mit Tiefe $d = 0$ aus nur einem NIL Knoten besteht. *(3 Punkte)*

Bemerkung: Ein Baum ist zur Tiefe d' voll besetzt wenn er für alle $x \leq d'$ genau 2^x Knoten mit Tiefe x hat (d.h., Schicht x des Baumes hat die maximale Anzahl Knoten).

(c) Geben Sie die minimale Anzahl von Knoten eines black-box-tree in Abhängigkeit von d als Rekursionsgleichung an und begründen Sie. *(3 Punkte)*

Hinweis: Drücken Sie die minimale Anzahl der Knoten eines black-box-tree der Tiefe d rekursiv mittels der min. Anzahl Knoten niedrigerer black-box-tree aus (mit Basisfällen für Tiefe 0 bzw. 1).

(d) Zeigen Sie dass ein black-box-tree mit n Knoten Tiefe $\mathcal{O}(\log n)$ hat. *(3 Punkte)*

Hinweis: Benutzen Sie dazu entweder Aussage a) oder Aussage b)