Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 9

Graphenalgorithmen II:
Minimale Spannbäume

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Graphen

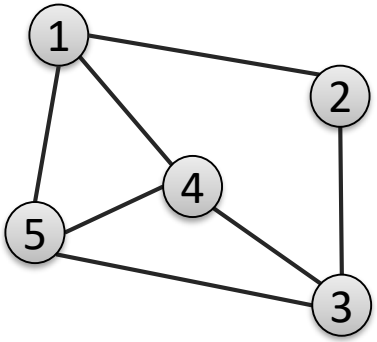
Knotenmenge V, typischerweise $n := |V|$ (English: **v**ertex or node)

Kantenmenge E, typischerweise $m := |E|$ (English: **e**dge)

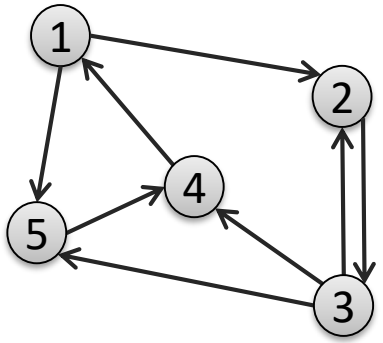
- ungerichteter Graph: $E \subseteq \{\{u,v\} : u,v \in V\}$

In dieser Vorlesung: Nur ungerichtete Graphen

Beispiele:



$V = \{1,2,3,4,5\}$
$E = \{(1,2),(1,5),(2,3),(3,4),(3,4),(3,5),(4,1),(5,4)\}$



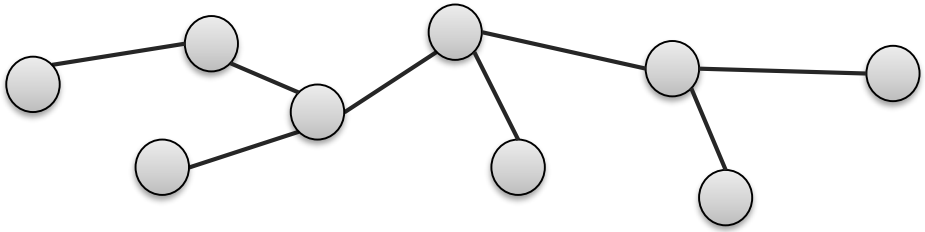
$V = \{1,2,3,4,5\}$
$E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$

Bäume

- Als ungerichtete Graphen (mit n Knoten) betrachtet…

Baum:

- Zusammenhängender ungerichteter Graph, ohne Zyklen
  - Ein nicht zusammenhängender zyklenfreier (unger.) Graph heisst Wald
  - Anzahl Kanten: $n - 1$ (jede Kante reduziert die #Komponenten um 1)



Äquivalente Definitionen:

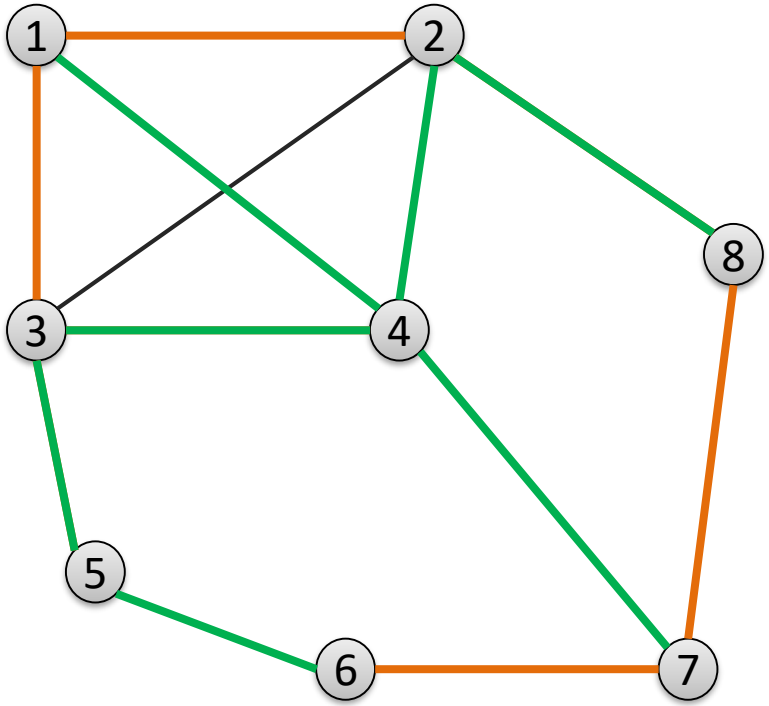
- Minimaler zusammenhängender Graph
- Maximaler zyklenfreier Graph
- Eindeutiger Pfad zwischen jedem Knotenpaar
- Zusammenhängender Graph mit $n - 1$ Kanten

Spannbaum

Gegeben: Zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Spannbaum $T = (V, E_T)$: Teilgraph ($E_T \subseteq E$)

- T ist ein Baum ist, welcher alle Knoten von G enthält
- Alternativ: T ist ein Baum mit $n - 1$ Kanten aus E

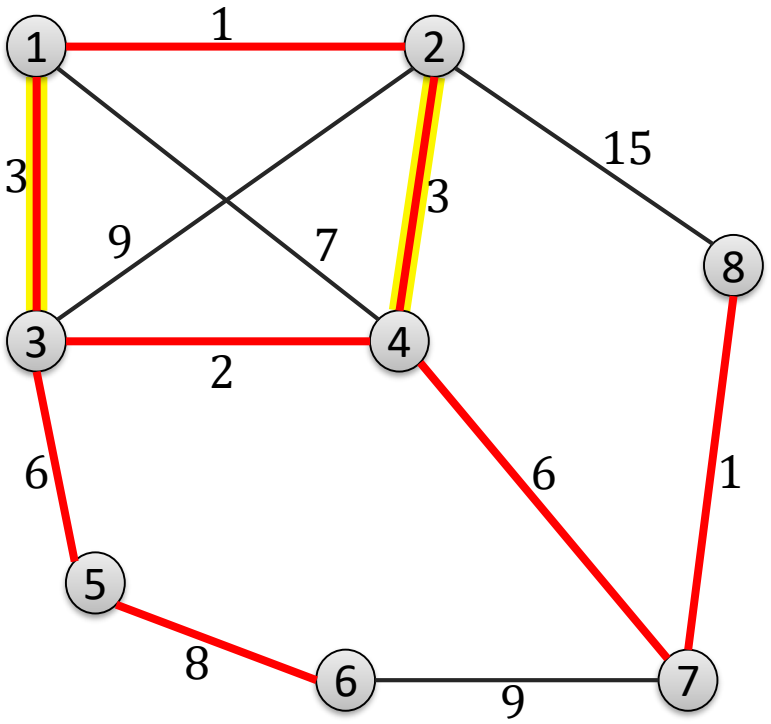


Minimaler Spannbaum

Gegeben: Zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E, w)$ mit Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}$

Minimaler Spannbaum $T = (V, E_T)$:

- Spannbaum mit kleinstem Gesamtgewicht



Minimale Spannbäume

UNI FREIBURG

Ziel: Gegeben ein gewichteter, ungerichteter Graph G, finde einen Spannbaum mit minimalem Gesamtgewicht.

- **Minimaler Spannbaum = Minimum Spanning Tree = MST**
- Ein grundlegendes Optimierungsproblem auf Graphen
  - eines von sehr vielen Optimierungsproblemen auf Graphen
- kommt oft als Teilproblem vor
- ist aber auch interessant an sich
  - Zum Beispiel im Zusammenhang mit Netzwerken
  - Ein minimaler Spannbaum ist die kostengünstigste Möglichkeit alle Knoten in einem Netzwert zu verbinden.

Basis-MST-Algorithmus

UNI FREIBURG

Idee: Starte mit leerer Kantenmenge und füge die Kanten schrittweise hinzu, bis es ein Spannbaum ist

Invariante:
Algorithmus hat zu jeder Zeit eine Kantenmenge A, so dass A Teilmenge eines minimalen Spannbaums ist.

- Am Anfang ist $A = \emptyset$
- Danach wird jeweils eine Kante hinzugefügt, ohne die Invariante zu verletzen
- Wir nennen eine Kante, für welche wir sicher sein können, dass wir sie zu A hinzufügen können eine sichere Kante für A
- Wie man sichere Kanten findet, werden wir sehen…

Basis-MST-Algorithmus

Invariante:
Algorithmus hat zu jeder Zeit eine Kantenmenge A, so dass A Teilmenge eines minimalen Spannbaums ist.

Basis-MST-Algorithmus:

$A = \emptyset$
while A ist kein Spannbaum **do**
    Finde sichere Kante $\{u, v\}$ für A
    $A = A \cup \{\{u, v\}\}$
return A

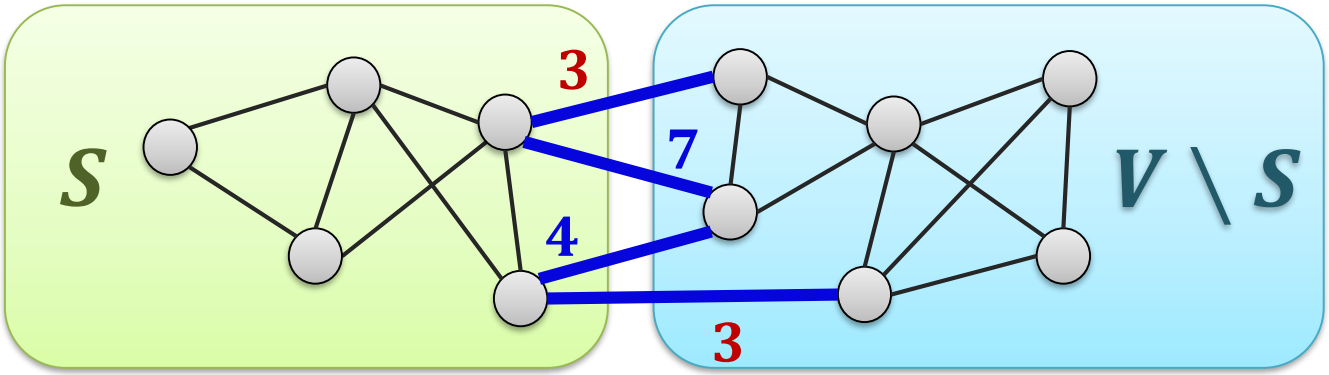
- Invariante ist eine gültige Schleifeninvariante
- Invariante + Abbruchbedingung $\Longrightarrow$ A ist ein MST!

Wie findet man sichere Kanten?

- Invariante → es gibt immer mindestens eine sicher Kante
  - A ist Teilmenge eines MST und kann daher zu einem MST erweitert werden

- Zuerst benötigen wir ein paar Begriffe…

Schnitt $(S, V \setminus S)$, $S \neq \emptyset$, $S \neq V$:



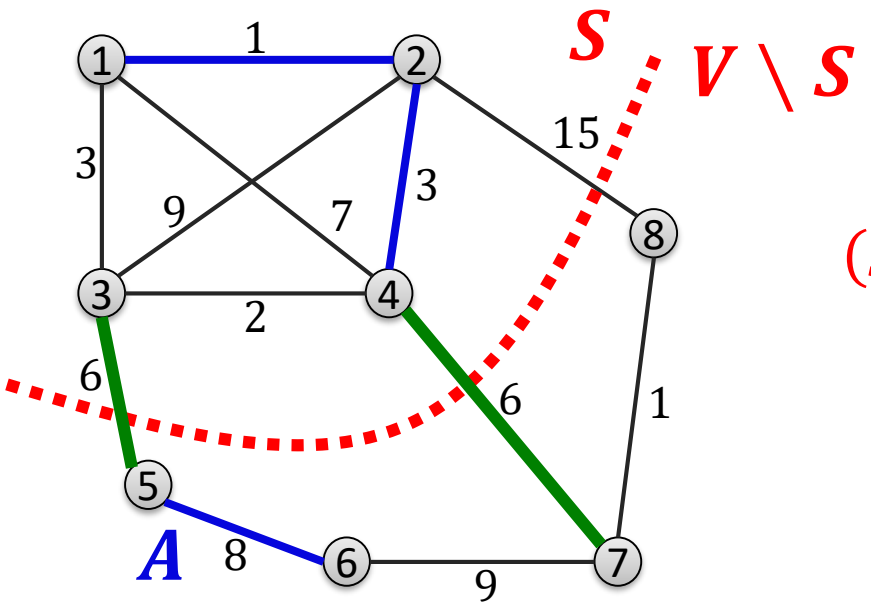
- Kante $\{u, v\} \in E$ ist eine Schnittkante bezüglich $(S, V \setminus S)$, falls ein Knoten der Kante in S und ein Knoten der Kante in $V \setminus S$ ist.
- Wir nennen Kante $\{u, v\}$ eine **leichte Schnittkante** bez. $(S, V \setminus S)$, falls sie das kleinste Gewicht von allen Schnittkanten hat

Sichere Kanten

Annahmen:

- $G = (V, E, w)$ ist zus.-h., unger. Graph mit Kantengewichten $w(e)$
- A ist Teilmenge (Teilgraph) eines MST

Theorem: Sei $(S, V \setminus S)$ ein Schnitt, so dass A keine Schnittkanten enthält und sei $\{u, v\}$, $u \in S$, $v \in V \setminus S$ eine leichte Schnittkante bezüglich $(S, V \setminus S)$. Dann ist $\{u, v\}$ eine sichere Kante für A.



A: Kantenmenge, die Teilmenge eines MST ist.

$(S, V \setminus S)$: Schnitt, bei dem keine Kante in A Schnittkante ist.

Leichte Schnittkanten sind sichere Kanten und können zu A hinzugefügt werden.

Kurzer Exkurs zu Bäumen

Theorem: Ein zusammenhängender (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und $n - 1$ Kanten ist ein Baum.

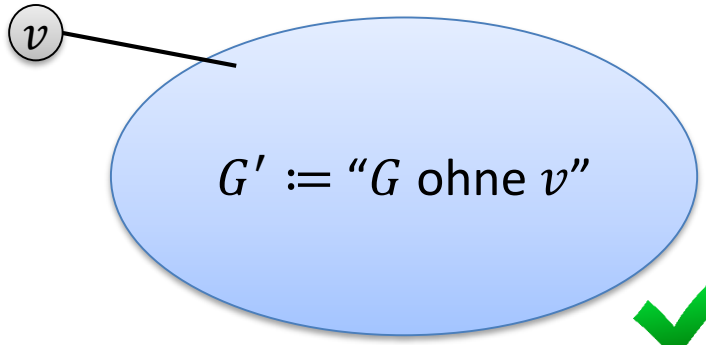
Beweis: Per Induktion über n

- **Verankerung** ($n = 1$):

- **Induktionsschritt** ($n - 1 \rightarrow n$):
  - Ein Graph mit n Knoten und $n - 1$ Kanten hat einen Knoten mit Grad ≤ 1

$$\text{avgdeg}(G) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{v \in V} \deg(v) = \frac{2|E|}{n} = \frac{2n-2}{n} < 2$$

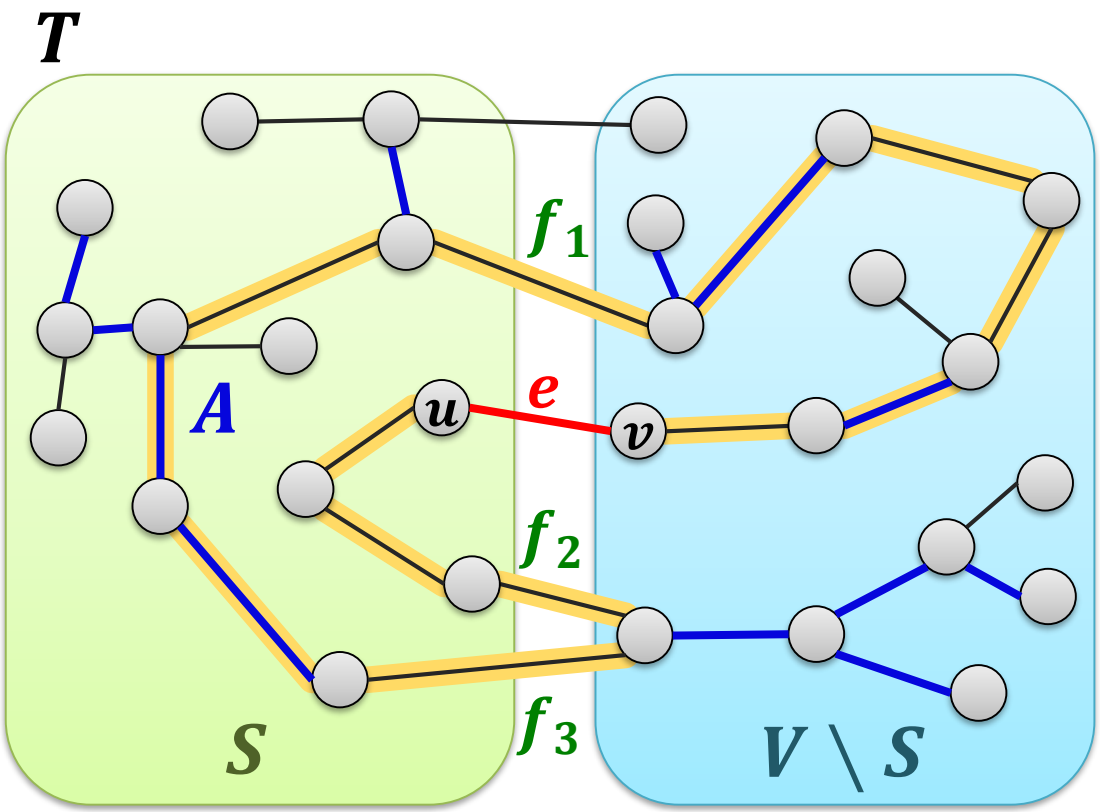
  - Falls G zusammenhängend ist : $\exists v \in V : \deg(v) = 1$



Sichere Kanten

Theorem: Sei $(S, V \setminus S)$ ein Schnitt, so dass A keine Schnittkanten enthält und sei $e = \{u, v\}$, $u \in S$, $v \in V \setminus S$ eine leichte Schnittkante bezüglich $(S, V \setminus S)$. Dann ist $\{u, v\}$ eine sichere Kante für A.

Beweis: Betrachte einen MST T, der die Kanten in A enthält.



Schnittkante f_i auf u-v Pfad

- $T' := (V, E \setminus \{f_i\} \cup \{e\})$
  $\Longrightarrow T'$ ist zus.-hängend.
- T' hat $n - 1$ Kanten
  $\Longrightarrow T'$ ist ein Baum.
- e leichte Kante
  $\Longrightarrow w(e) \leq w(f_i)$
- $w(T') \leq w(T)$
  $\Longrightarrow T'$ ist ein MST, der A und e enthält.

Prims MST Algorithmus

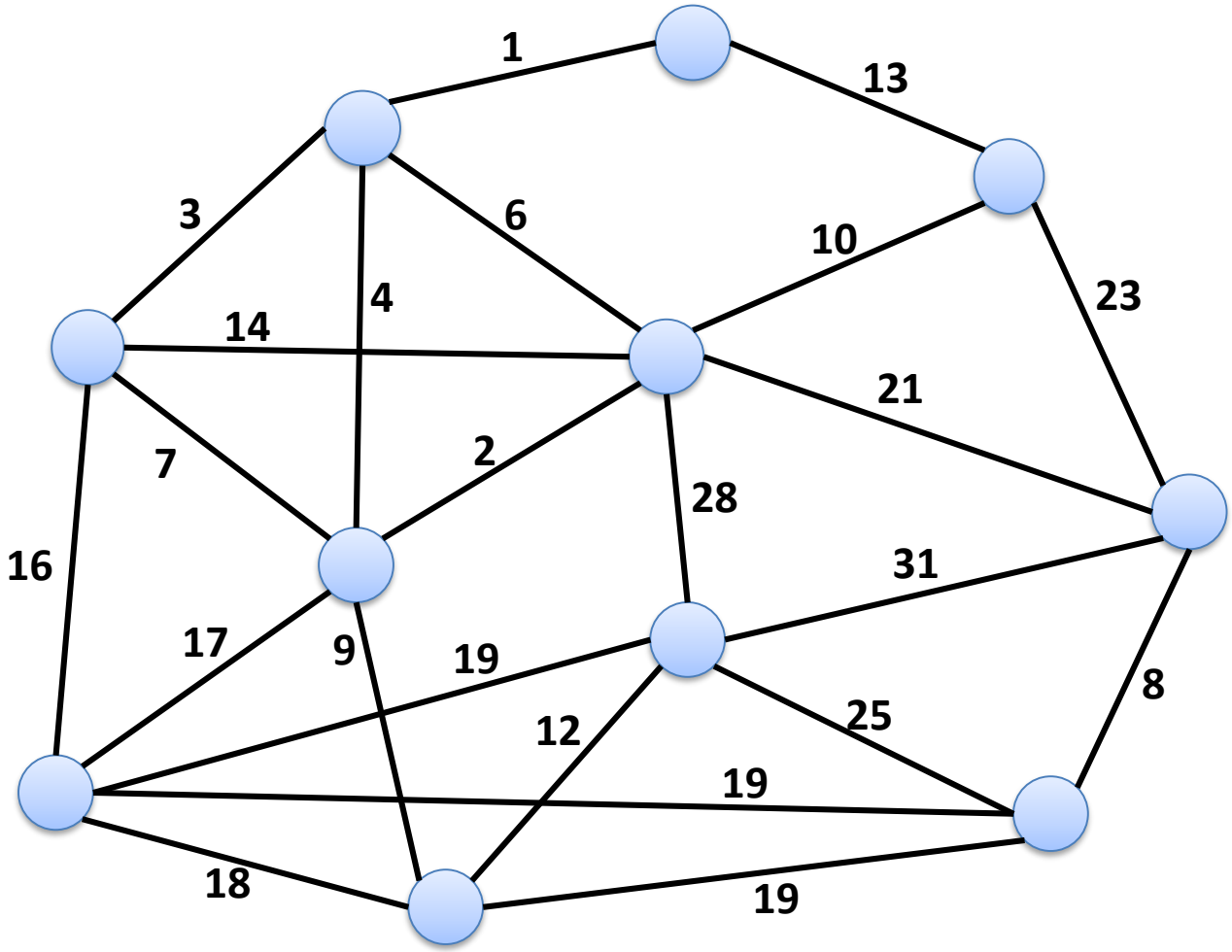
- Sollte man wohl eigentlich Jarníks Algorithmus nennen
  - wurde 1957 von Prim und bereits 1930 von Jarník publiziert

- Eine mögliche Implementierung des Basis-Algorithmus

$A = \emptyset$
while A ist kein Spannbaum **do**
    Finde sichere Kante $\{u, v\}$ für A
    $A = A \cup \{\{u, v\}\}$
return A

- **Idee:** A ist immer ein zusammenhängender Teilbaum
  - Starte bei einem beliebigen Knoten $s \in V$
  - Baum wächst von s aus, indem immer eine leichte Schnittkante des durch A induzierten Schnitts hinzugefügt wird.

Prims MST-Algorithmus: Beispiel



Prims MST-Algorithmus

$S := \{s\}$; $A := \emptyset$
while (S, A) ist kein Spannbaum **do**
    $e = \{u, v\}$ ist Kante mit kleinstem Gewicht, so dass $u \in S$ und $v \notin S$
    $S := S \cup \{v\}$; $A := A \cup \{\{u, v\}\}$

Wir müssen zeigen, dass e eine sichere Kante für A ist

- Das folgt aber direkt, weil
  - S immer genau die Knoten enthält, die in einer Kante in A enthalten sind.
  - Es hat deshalb keine Schnittkante von $(S, V \setminus S)$ in A
  - $e = \{u, v\}$ ist eine solche Kante mit kleinstem Gewicht
  - Das vorige Theorem impliziert deshalb, dass A eine sichere Kante für A ist.

Implementierung von Prims Algorithmus

UNI FREIBURG

- **Knoten in S heissen markiert**
  - Das sind also genau die Knoten, die durch A bestimmten Teilbaum sind.

- **Ein Schritt des Algorithmus:**
  - Man sucht eine Kante mit kleinstem Gewicht, die einen markierten Knoten (einen Knoten in S) mit einem nicht-markierten Knoten verbindet.
  - Diese Kante kann grundsätzlich beliebigen nicht markierten Knoten $u \in V \setminus S$ mit einem beliebigen markierten Knoten in S verbinden.

- **Knoten $u \in V \setminus S$:**
  - $\alpha(u)$ ist der nächste Nachbar von u im durch A bestimmten Teilbaum
  - $d(u) = \mathrm{dist}\big(u, \alpha(u)\big)$
    - $d(u) = \infty$ falls u keinen Nachbar in S hat
  - Wir suchen also immer einen Knoten $u \in V \setminus S$ mit kleinstem $d(u)$ und fügen dann die Kante $\{u, \alpha(u)\}$ zu A hinzu.
  - Dazu müssen wir die Werte $d(u)$ nach jedem Schritt aktualisieren

Implementierung von Prims Algorithmus

- Knoten in S heissen markiert
- Knoten u:
  - $\alpha(u)$ ist der nächste Nachbar von u in $V \setminus S$ (falls definiert)
  - $d(u) = \text{dist}\big(u, \alpha(u)\big)$ (oder $d(u) = \infty$ falls $u \notin S$ oder $\alpha(u) = \text{NULL}$)

for all $u \in V \setminus \{s\}$ **do**
    u.marked = false; $d(u) = \infty$; $\alpha(u)$ = NULL
$d(s) = 0$; $A = \emptyset$ // Wir starten bei Knoten s
while there are unmarked nodes **do**
    u = unmarked node with minimal $d(u)$
    for all unmarked neighbors v of u **do**
        if $w(\{u,v\}) < d(v)$ then
            $\alpha(v) = u$; $d(v) = w(\{u,v\})$
    u.marked = true
    if $u \neq s$ **then** $A = A \cup \big\{\{u, \alpha(u)\}\big\}$

Abstrakte Datentypen : Priority Queue

UNI FREIBURG

Heap / Priority Queue (Prioritätswarteschlange):

- Verwaltet eine Menge von *(key,value)*-Paaren

Operationen:

- *create()* : erzeugt einen leeren Heap
- *H.insert(x, key)* : fügt Element *x* mit Schlüssel *key* ein
- *H.getMin()* : gibt Element mit kleinstem Schlüssel zurück
- *H.deleteMin()* : löscht Element mit kleinstem Schlüssel
  - *H.getMin()* und *H.deleteMin()* müssen konsistent sein
- *H.decreaseKey(x, newkey)* : Falls *newkey* kleiner als der aktuelle Schlüssel von *x* ist, wird der Schlüssel von *x* auf *newkey* gesetzt

Implementierung von Prims Algorithmus

UNI FREIBURG

```
H = new priority queue; A = ∅
for all u ∈ V \ {s} do
    H.insert(u, ∞); α(u) = NULL
H.insert(s, 0)

while H is not empty do
    u = H.deleteMin()
    for all unmarked neighbors v of u do
        if w({u,v}) < d(v) then
            H.decreaseKey(v, w({u,v}))
            α(v) = u
    u.marked = true
    if u ≠ s then A = A ∪ {{u, α(u)}}
```

Analyse von Prims MST-Algorithmus

UNI FREIBURG

Anzahl Priority Queue Operationen

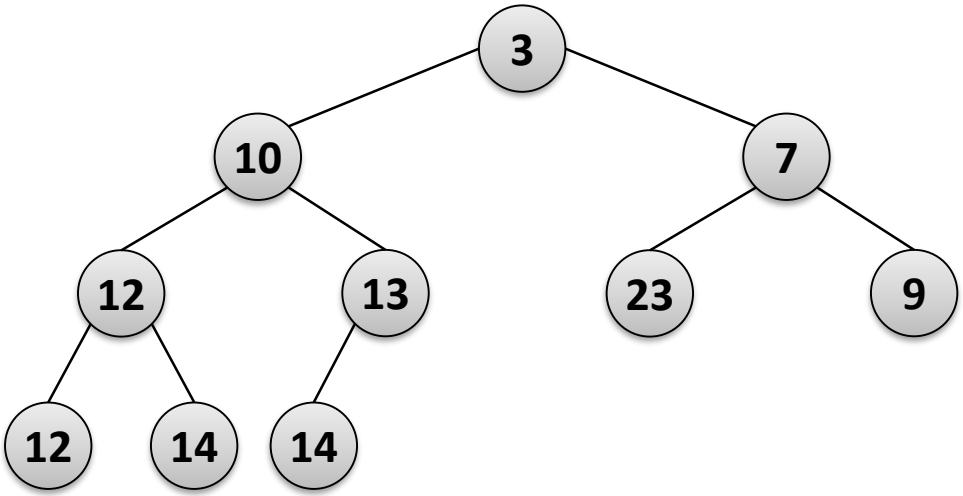
- **create** $\mathbf{1}$
- **insert** $\boldsymbol{O(n)}$ (jeder Knoten genau einmal)
- **getMin / deleteMin** $\boldsymbol{O(n)}$ (jeder Knoten genau einmal)
- **decreaseKey** $\boldsymbol{O(m)}$ (für jede Kante höchstens einmal, dann wenn der erste Knoten der der Kante zu S hinzugefügt wird)

Prioritätswarteschlangen

UNI FREIBURG

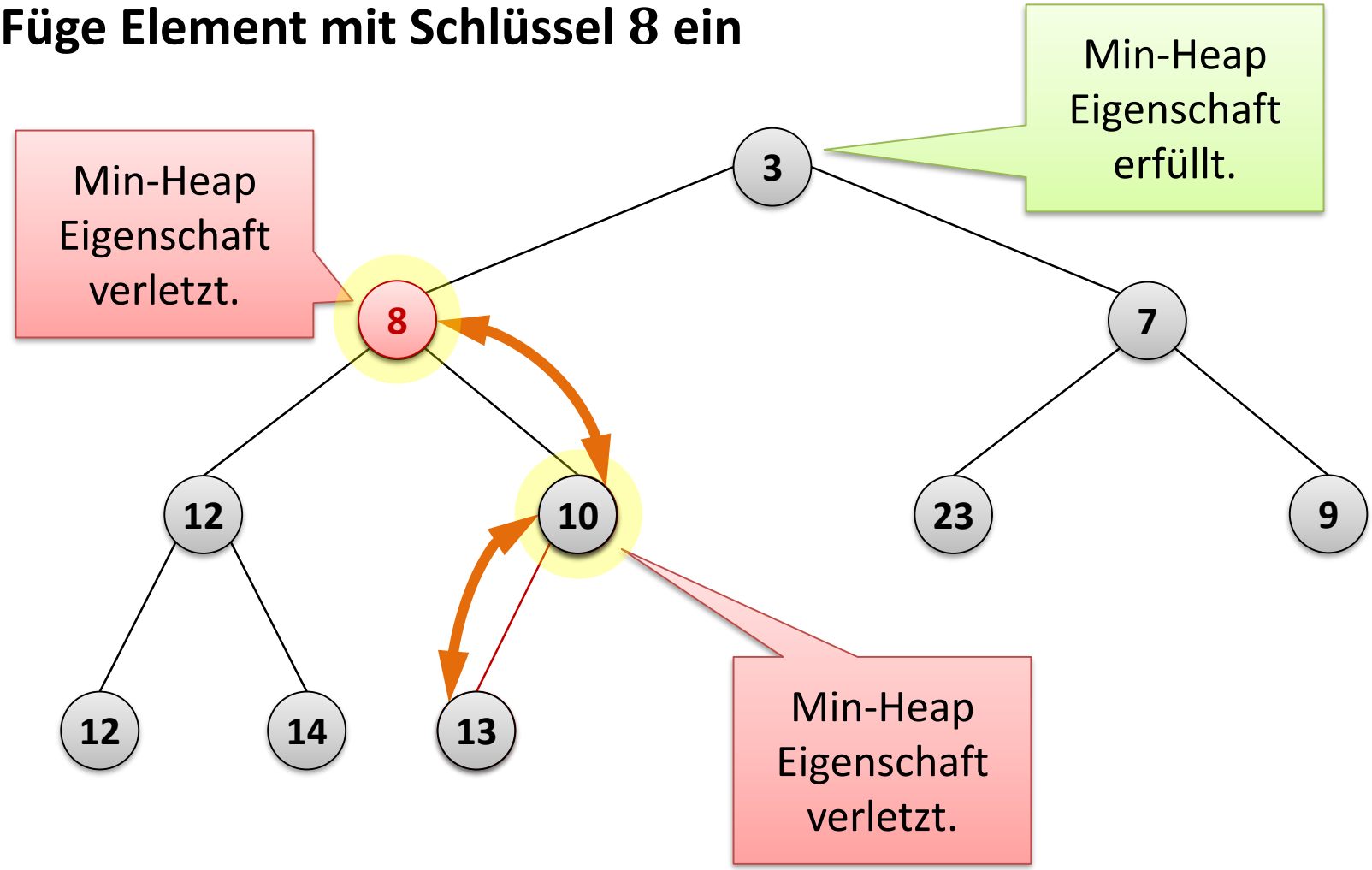
Implementierung als Binärbaum mit Min-Heap Eigenschaft

- Die Datenstruktur heisst deshalb oft auch Heap
- Ein Baum hat die Min-Heap Eigenschaft, falls in jedem Teilbaum, die Wurzel den kleinsten Schlüssel hat
- getMin-Operation: trivial!
- Baum wird immer so balanciert, wie möglich gehalten
  - Alle ausser der untersten Ebene sind voll.
  - Die unterste Ebene wird dabei von links nach rechts gefüllt.



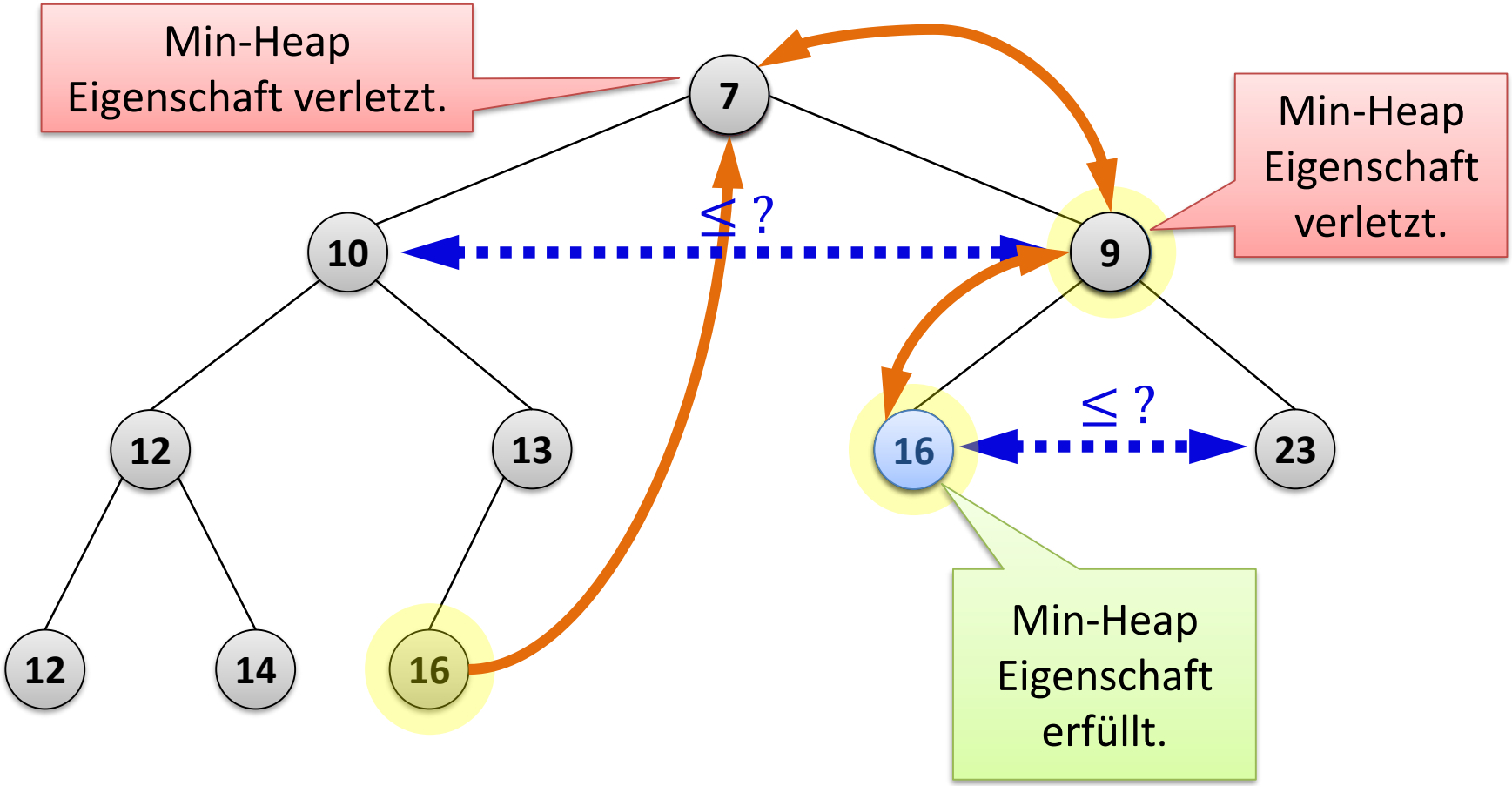
Prioritätswarteschlangen: Einfügen

Füge Element mit Schlüssel 8 ein



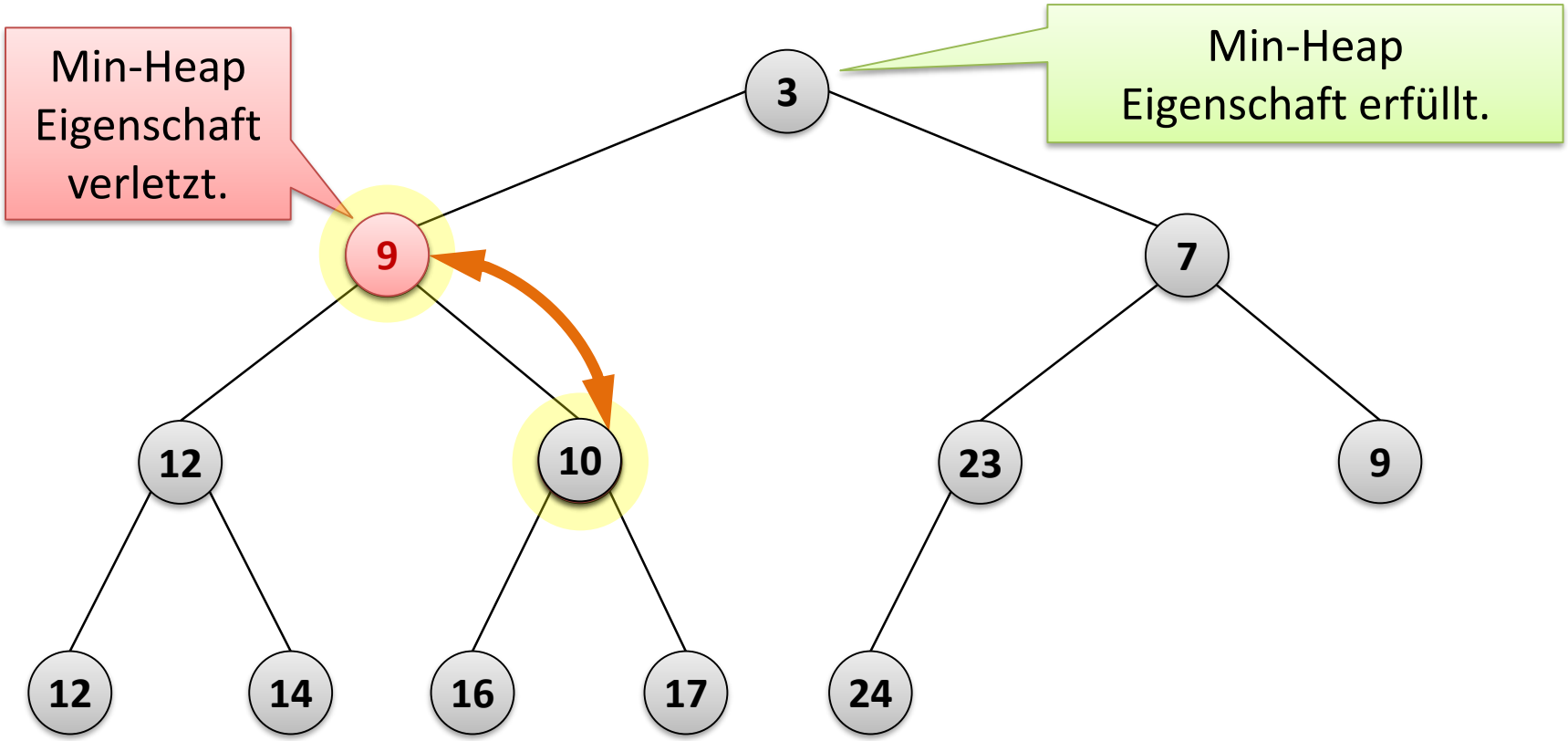
Prioritätswarteschlangen: Delete-Min

Lösche das Element in der Wurzel (mit kleinstem Schlüssel)



Prioritätswarteschlangen: Decrease-Key

Decrease Key: Knoten mit Schlüssel $13 \Rightarrow$ neuer Schlüssel 9



Für die decrease-key Operation muss man eine Referenz auf den Knoten gegeben haben, dessen Schlüssel verkleinert werden soll.

Prioritätswarteschlangen: Analyse

- Die besprochene Variante heisse auch **binärer Heap**
  - durch einen Binärbaum mit Min-Heap-Eigenschaft implementiert

- **Höhe (oder Tiefe) des Baums** ist immer genau $\lfloor \log_2 n \rfloor$
  - Anzahl Knoten in einem vollen Binärbaum der Höhe i ist $2^{i+1} - 1$

    Anzahl Knoten in Abstand j zur Wurzel ist 2^j:

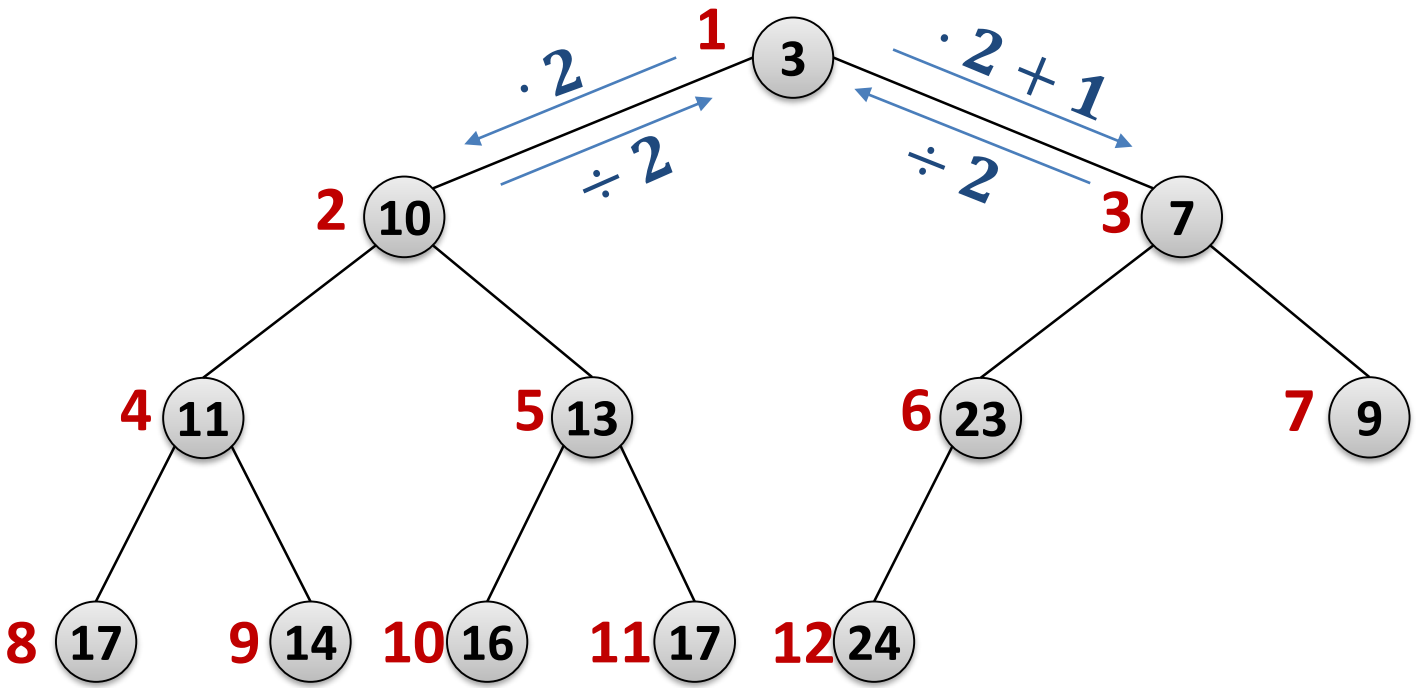
$$\#\text{Knoten} = \sum_{j=0}^{i} 2^j = 2^{i+1} - 1.$$

- **Laufzeit aller Operationen: $O(\log n)$**
  - wenn man den Binärbaum irgendwie vernünftig implementiert
  - man muss immer höchsten einmal den Binärbaum hoch (bei insert, decreaseKey) oder runter (bei deleteMin)
  - Wir werden gleich eine elegante Art sehen, den binären Heap zu impl.

Binäre Heaps, Array-Implementierung

Idee: Speichere **alles in ein Array in den Positionen 1 bis n**

- Das geht, weil der Baum perfekt balanciert ist



- Von Knoten an Position i
  - Linkes Kind an Position $j = 2 \cdot i$, rechtes Kind an Position $j = 2 \cdot i + 1$
  - Parent an Position $j = i/2$ (Ganzzahl-Division, d.h., $j = \lfloor i/2 \rfloor$)

Heapsort

- Die Array-Implementierung von Heaps (Prioritätswarteschlangen) gibt auch einen weiteren effizienten Sortieralgorithmus

Heapsort (H ist ein binärer Heap, sortiere Array A)

```
H = new BinaryHeap()
for i = 0 to n - 1 do
    H.insert(A[i])
for i = 0 to n - 1 do
    A[i] = H.deleteMin()
```

- **Laufzeit:** $O(n \log n)$

Prims Algorithmus mit binären Heaps

UNI FREIBURG

```
H = new BinaryHeap(); A = ∅
for all u ∈ V \ {s} do
    H.insert(u, ∞); α(u) = NULL
H.insert(s, 0)
while H is not empty do
    u = H.deleteMin()
    for all unmarked neighbors v of u do
        if w({u,v}) < d(v) then
            H.decreaseKey(v, w({u,v})); α(v) = u
    u.marked = true
    if u ≠ s then A = A ∪ {{u, α(u)}}
```

Laufzeit: $O(m \cdot \log n)$

- n insert-Operationen und deleteMin-Operationen
- $\leq m$ decreaseKey-Operationen

Prims Algorithmus ohne Decrease-Key

H = new BinaryHeap(); $A = \emptyset$
for all $u \in V \setminus \{s\}$ **do**
    H.insert(u, ∞); $\alpha(u)$ = NULL
H.insert(s, 0)
while H is not empty **do**
    u = H.deleteMin()
    if not u.marked **then**
        for all unmarked neighbors v of u **do**
            if $w(\{u,v\}) < d(v)$ **then**
                H.insert(v, $w(\{u,v\})$); $\alpha(v) = u$
        u.marked = true
        if $u \neq s$ **then** $A = A \cup \{\{u, \alpha(u)\}\}$

Laufzeit: $O(m \cdot \log n)$

- $O(m)$ insert-Operationen und deleteMin-Operationen

Prims Algorithmus: Bessere Laufzeit

UNI FREIBURG

Laufzeit mit binären Heaps: $O(m \cdot \log n)$

- $n \leq m + 1$ insert-Operationen und deleteMin-Operationen
- $\leq m$ decreaseKey-Operationen

Beste Implementierung von Prioritätswarteschlangen:

- Fibonacci Heaps (siehe Vorlesung Algorithmentheorie)
- Laufzeit der Operationen (deleteMin, decreaseKey amortisiert)

  insert: $O(1)$, deleteMin: $O(\log n)$, decreaseKey: $O(1)$

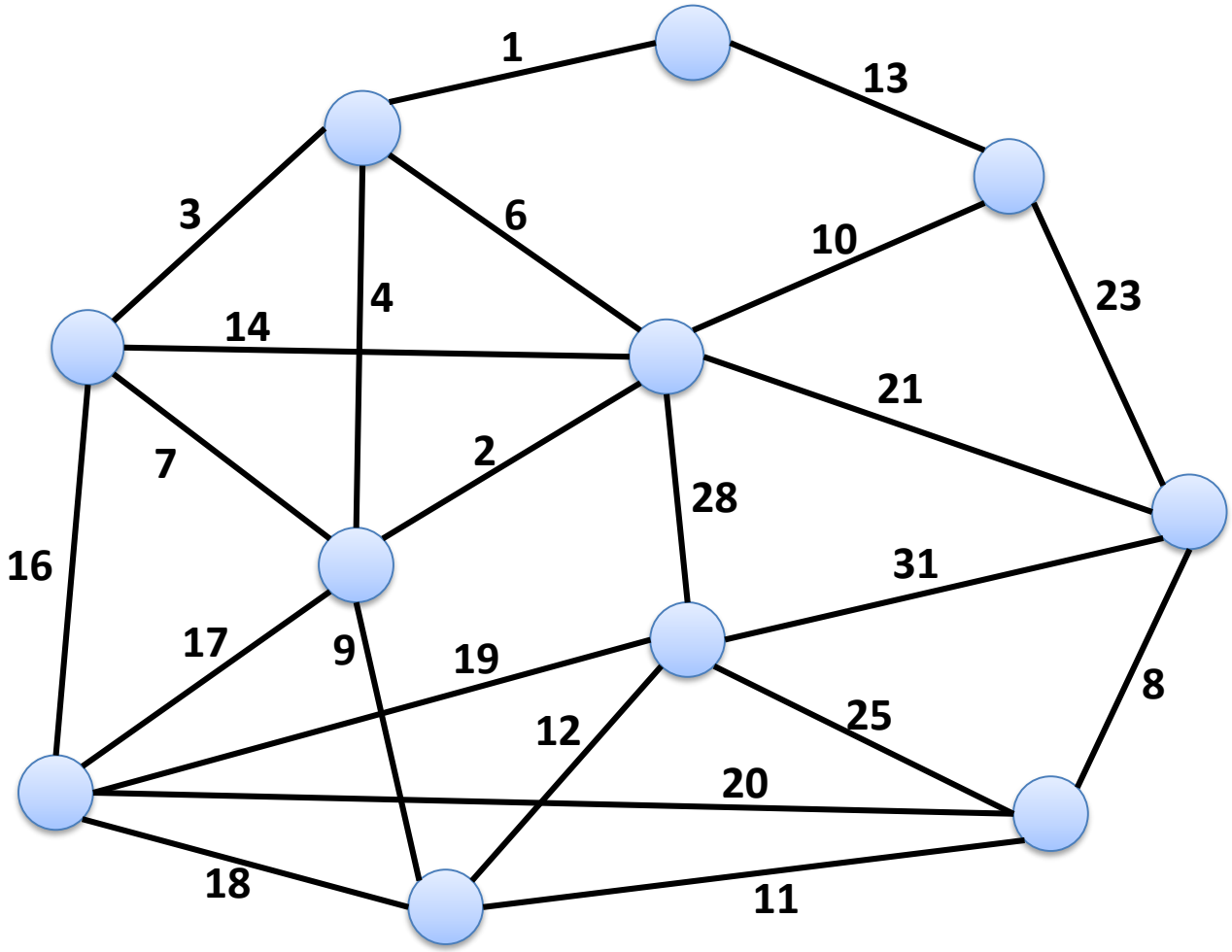
Laufzeit mit Fibonacci Heaps: $O(m + n \cdot \log n)$

- $n \leq m + 1$ insert-Operationen und deleteMin-Operationen
- $\leq m$ decreaseKey-Operationen
  (in diesem Fall muss man es mit decrease-key implementieren)

Kruskal's MST-Algorithmus

$A = \emptyset$
while A ist kein Spannbaum **do**
    $e = \{u, v\}$ ist Kante mit kleinstem Gewicht,
    so dass $A \cup \{\{u, v\}\}$ keinen Zyklus enthält
    $A = A \cup \{\{u, v\}\}$

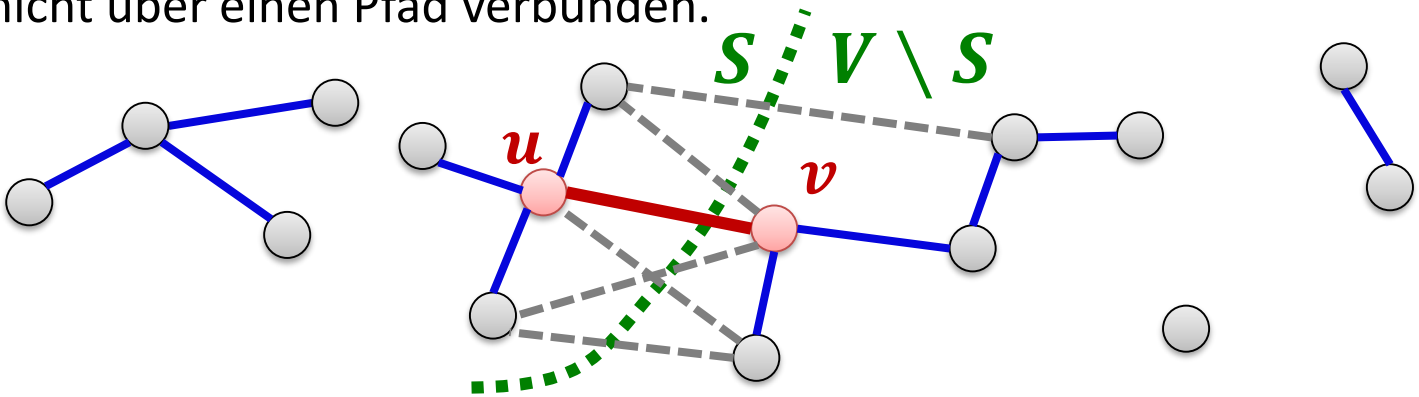
Kruskal's MST-Algorithmus: Beispiel



Kruskal's MST-Algorithmus

$A = \emptyset$
while A ist kein Spannbaum **do**
    $e = \{u, v\}$ ist Kante mit kleinstem Gewicht, so dass $A \cup \{\{u, v\}\}$ keinen Zyklus enthält
    $A = A \cup \{\{u, v\}\}$

- Wir müssen zeigen, dass e eine sichere Kante für A ist
  - Da $A \cup \{\{u, v\}\}$ keinen Zyklus enthält, sind u und v durch die Kanten in A nicht über einen Pfad verbunden.



  - Es gibt einen Schnitt $(S, V \setminus S)$, so dass A keine Schnittkanten enthält, so dass $u \in S$ und $v \in V \setminus S$ ist, und $\{u, v\}$ eine leichteste Schnittkante ist.

Implementierung Kruskals Algorithmus

UNI FREIBURG

Kruskals Algorithmus (Pseudocode)

1. $A = \emptyset$
2. Sortiere Kanten aufsteigend nach Kantengewicht
3. **for** $e = \{u, v\} \in E$ (in sorted order) **do**
4. **if** u and v are in different components **then**
5. $A = A \cup \{e\}$

- Müssen Komponenten des durch A bestimmten Graphen effizient verwalten können
- **Laufzeit:** $O(m \log n)$ für's Sortieren, sowie die Gesamtzeit, um die Komponenten zu verwalten…

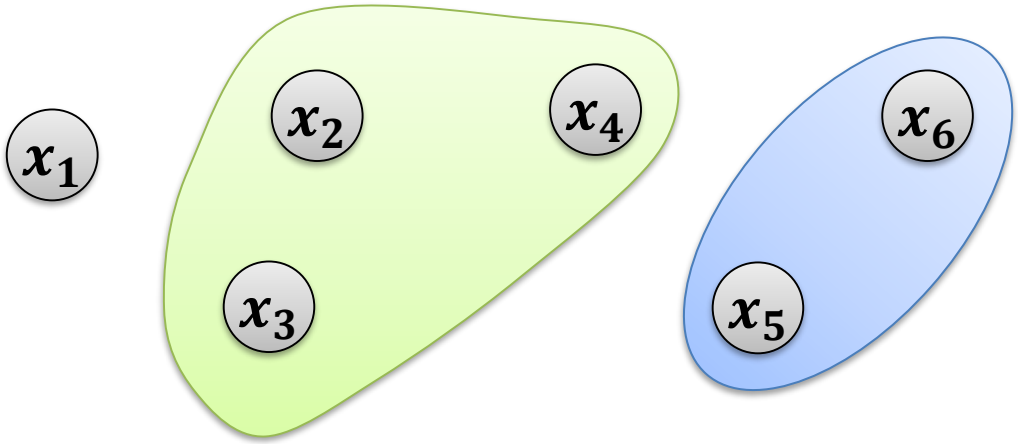
Abstrakte Datentypen : Union-Find

Union-Find / Disjoint Sets:

- Verwaltet eine Partition von Elementen

Operationen:

- *create()* : erzeugt eine leere Union-Find-DS
- *U.makeSet(x)* : fügt Menge $\{x\}$ zur Partition hinzu
- *U.find(x)* : gibt Menge mit Element x zurück
- *U.union(S1, S2)* : vereinigt die Mengen $S1$ und $S2$



Kruskal mit Union-Find

UNI FREIBURG

Kruskals Algorithmus

1. $A = \emptyset$
2. U = create new
3. **for all** $u \in V$ **do**
4. U.makeSet(u)
5. Sortiere Kanten aufsteigend nach Kantengewicht
6. **for all** $e = \{u,v\} \in E$ (in sorted order) **do**
7. S_u = U.find(u); S_v = U.find(v)
8. **if** $S_u \neq S_v$ **then**
9. $A = A \cup \{e\}$
10. U.union(S_u,S_v)

Kruskal: Laufzeitanalyse

UNI FREIBURG

Beste Union-Find Datenstruktur

- Laufzeit für m Union-Find-Operationen auf n Elementen (n makeSet-Operationen):

$$\boldsymbol{O\big(m \cdot \alpha(n)\big)}$$

- $\alpha(n)$ ist die Inverse der Ackermannfunktion und wächst extrem langsam (für alle in der Praxis möglichen n, $\alpha(n) \leq 5$)

Laufzeit Kruskal

- Kanten sortieren: $O(m \cdot \log n)$
  - Falls die Gewichte ganze Zahlen im Bereich $0, \dots, n^{O(1)}$ sind, kann man mit Radix-Sort in Linearzeit sortieren.
- Union-Find-Operationen: $O\big(m \cdot \alpha(n)\big)$
- Insgesamt: $O(m \cdot \log n)$
  - besser, falls Kantengewichte schneller sortiert werden können

Prim und Kruskal: Bemerkungen

Beide Algorithmen sind typische Beispiele für sogenannte

Greedy Algorithmen

- Bei Greedy Algorithmen wird eine Lösung schrittweise aufgebaut.
- In jedem Schritt wird ein aktuell bestes “Element” hinzugefügt.
- Bereits berechnete Teile der Lösung werden nicht mehr verändert.

Prim und Kruskal Algorithmen zur Berechnung eines MST

- Wir beginnen mit einer leeren Kantenmenge
- In jedem Schritt wird die im Moment beste Kante hinzugenommen
  - Bei Prim: beste Kante, die den Teilbaum zusammenhängend belässt.
  - Bei Kruskal: beste Kante, so dass man alles zu einem Baum erweitern kann.
- Eine gewählte Kante wird nie wieder verworfen