



Algorithmen und Datenstrukturen

Sommersemester 2026

Übungsblatt 13

Abgabe: Dienstag, 28. Juli, 2026, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Minimale Spannbäume

(5 Bonus Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit paarweise verschiedenen Kantengewichten. Sei T ein minimaler Spannbaum von G .

- (a) Sei e eine Kante mit minimalem Gewicht in G . Zeigen Sie, dass es einen minimalen Spannbaum von G gibt, der e enthält. (1 Punkte)
- (b) Sei e eine Kante mit maximalem Gewicht auf einem Kreis C in G . Zeigen Sie, dass kein minimaler Spannbaum von G die Kante e enthält. (3 Punkte)
- (c) Erklären Sie kurz, welche der beiden Aussagen aus den Teilen (a) und (b) die Korrektheit des Kruskal-Algorithmus unterstützt. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Insertion Sort und Inversionen

(7 Bonus Punkte)

Sei $A[1, \dots, n]$ ein Array mit paarweise verschiedenen Zahlen. Eine *Inversion* ist ein Paar von Indizes (i, j) mit

$$i < j \quad \text{und} \quad A[i] > A[j].$$

Mit $I(A)$ bezeichnen wir die Anzahl der Inversionen in A . Betrachten Sie eine Variante von Insertion Sort, bei der ein Element so lange mit seinem linken Nachbarn vertauscht wird, bis es seine korrekte Position erreicht hat.

- (a) Zeigen Sie, dass das Vertauschen zweier benachbarter Elemente, die eine Inversion bilden, die Anzahl der Inversionen um genau eins reduziert. (2 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass jeder von Insertion Sort ausgeführte Tausch zwei Elemente vertauscht, die eine Inversion bilden. (2 Punkte)
- (c) Folgern Sie daraus, dass Insertion Sort genau $I(A)$ Vertauschungen ausführt. (1 Punkt)
- (d) Geben Sie eine asymptotische Schranke für die Laufzeit von Insertion Sort in Abhängigkeit von n und $I(A)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Asymptotisches Wachstum

(6 Punkte)

Nehmen Sie an, dass alle Logarithmen zur Basis 2 sind.

- (a) Sortieren Sie die folgenden Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum. Falls zwei Funktionen asymptotisch gleich schnell wachsen, kennzeichnen Sie dies ausdrücklich. Beweise sind nicht erforderlich.

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n^{3/2}, & f_2(n) &= 2^{\log n + \sqrt{\log n}}, & f_3(n) &= (\log n)^{10}, \\ f_4(n) &= n \log n, & f_5(n) &= 4^{\log n}. \end{aligned}$$

(3 Punkte)

- (b) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe der Definition der Landau-Notation:

$$n(\log n)^2 \in O\left(n^{4/3}\right).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4: Hashing

(7 Punkte)

Wir speichern Daten in einer Hashtabelle der Größe $m = 11$. Kollisionen werden durch offene Adressierung mit Double Hashing aufgelöst. Die Sondierungsfunktion ist

$$h(x, j) = (h_1(x) + j \cdot h_2(x)) \bmod 11,$$

wobei

$$h_1(x) = x \bmod 11 \quad \text{und} \quad h_2(x) = 1 + (x \bmod 10).$$

Die Schlüssel

$$22, 41, 53, 46, 30, 13$$

werden in dieser Reihenfolge in eine anfangs leere Hashtabelle eingefügt.

- (a) Fügen Sie alle Schlüssel in die Hashtabelle ein. Geben Sie für jeden Schlüssel alle Positionen an, die überprüft werden, bevor der Schlüssel eingefügt wird. (3 Punkte)
- (b) Geben Sie den endgültigen Inhalt der Hashtabelle an. (1 Punkt)
- (c) Erklären Sie, weshalb die Sondierungsfolge jedes Schlüssels jede Tabellenposition besucht, bevor sich eine Position wiederholt. (2 Punkte)
- (d) Wie groß ist die Worst-Case-Laufzeit einer erfolglosen Suche in dieser Hashtabelle? Geben Sie Ihre Antwort für eine allgemeine Tabellengröße m in asymptotischer Notation an. (1 Punkt)